Probabilidades e Estatística

Curso de Matemática

Distribuições de probabilidade

Bertolo

OBJETIVOS

Ao final deste capítulo, esperamos que você seja capaz de:

- diferenciar variáveis aleatórias discretas e contínuas;
- Identificar situações práticas às quais as variáveis aleatórias podem ser aplicadas com propriedade, conhecendo assim as possíveis interpretações do experimento estatístico;
- Explicar as diferenças básicas entre distribuições discretas e contínuas de probabilidades;
- Calcular probabilidades mediante aplicação da distribuição Binomial, Poisson e Normal, tanto pelo uso de expressões, quanto pelo uso de Tabelas;

Esquema do Capítulo

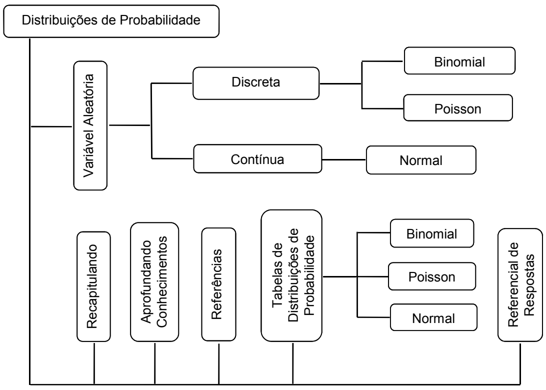


Figura 1 Esquema dos principais tópicos abordados neste capítulo.

Distribuições de Probabilidades - Reflexão

- Se você trabalha num açougue, então já observou vários quilogramas de carnes vendidas.
- Caso você seja um profissional da área da saúde, então é comum para você inferir o número de batimentos cardíacos de alguém.
- Certamente um professor do ensino fundamental lhe pediu para plantar sementinhas de feijão num algodão, por exemplo, e observar o que iria ocorrer.
- Você se lembra do número de questões que acertou na última avaliação presencial, ou se passou por algum outro exame com 50 questões, por exemplo?

Agora, siga com sua leitura para saber o porquê destas e outras reflexões presentes no seu dia a dia. Vale destacar o quanto você está intimamente ligado a *Estatística*, ou seja, o quanto você está exposto a **experimentos estatísticos**.

O que é uma distribuição de probabilidade?

Função de Probabilidades

Vamos considerar um experimento E que consiste no lançamento de um dado honesto.
Seja X a variável aleatória representando os pontos obtidos na face voltada para cima (elementos do espaço amostral).
Seja P(X) a **função** que associa a cada valor (evento) de X a sua probabilidade de ocorrência. Então, temos:

Tabela 1: Valores obtidos, na face voltada para cima, no lançamento de um dado honesto.

X	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Fonte: dados simulados

$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Notação: $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

A esta função que satisfaz o intervalo: $0 \leq p_i \leq 1$, dá-se o nome de **função de probabilidade**.

O conjunto de pares ordenados: $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, \ldots, n\}$ é chamado de **Distribuição de Probabilidades**

Exemplo

Consideremos a distribuição de frequências relativa ao número de acidentes diários em um estacionamento.

Tabela

Número de Acidentes	Frequências	Probabilidades
0	22	$p = \frac{22}{30} = 0{,}73$
1	5	$p = \frac{5}{30} = 0{,}17$
2	2	$p = \frac{2}{30} = 0{,}07$
3	1	$p = \frac{1}{30} = 0{,}03$
	$\Sigma = 30$	$\Sigma = 1{,}00$

Esta tabela é denominada **DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE**.

Exemplo 2

Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, de uma caixa que contém 4 bolas vermelhas e 3 pretas. Seja X a variável aleatória "número de bolas vermelhas retiradas no experimento". Quais os valores assumidos por "X" ? Qual a Função probabilidade P(x) ? Qual a distribuição de probabilidades?

Solução:

S = {vv, vp, pv, pp} ....Espaço Amostral S ou Ω

Então a VARIÀVEL ALEATÓRIA x = {2, 1, 1, 0}, ou seja, as duas bolas podem ser:

Duas vermelhas;

Uma vermelha e outra preta;

Uma preta e outra vermelha;

Duas pretas, ou seja, x = 0, 1, 2

x	0	1	2
P(x)	1/4	2/4	1/4

Exemplo 3

Vamos jogar 3 moedas honestas e observar o resultado.

a. Construa o espaço amostral.
b. Construa a variável aleatória x indicando o número de caras (Ca)
c. Construa a distribuição de probabilidades;
d. Calcule as probabilidades acumuladas.

Solução:

a.
S:{(CaCaCa)(CaCaCo)(CaCoCa)(CoCaCa)(CoCoCo)(CoCoCa)(CoCaCo)(CaCoCo)}
n= 8 elementos

b. Seja **X** a *variável aleatória* ⇒ X = número de caras (Ca)

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$

c.

x	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

d. 1/8 4/8 7/8 8/8

ATIVIDADE 01

Certo experimento consiste no lançamento de dois dados e na observação da soma dos pontos das faces superiores. Considere D_1: dado 1, D_2: dado 2 e $\mathbb{Z}$ a soma dos pontos das faces superiores. Determine o *espaço amostral* do experimento e a *função de probabilidade* de $\mathbb{Z}$.

Solução

D_1: dado 1 e D_2: dado 2

$\mathbb{Z}$: soma dos pontos das faces superiores

E_1: lançar dois dados e observar a soma das faces superiores

TABELA 1 – Soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados honestos

D1 \ D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Espaço amostral: Ω = {(1;1);(1;2);(1;3);...; (6;6)}

Variável aleatória Z = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Tabela 2: Função de probabilidade obtida, no lançamento de dois dados honestos.

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Fonte: dados simulados

Variáveis Aleatórias

Seja o experimento E que consite em tomar uma semente ao acaso, de girassol, por exemplo, e observar se ela germina (G) ou não germina ($\overline{G}$).
O espaço amostral Ω será: $\Omega = \{G, \overline{G}\}$.
Construindo a variável aleatória X, referida daqui prá frente como v.a., assim:

$$X = \begin{cases} 0, \text{ se a semente germina} \\ 1, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Generalizando:
Seja **E** um experimento aleatório qualquer e, Ω o seu espaço amostral denotado por $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Qualquer função X que associa os valores de Ω com números reais é chamada de **variável aleatória.**

Variáveis Aleatórias Discreta

Seja E um experimento aleatório qualquer e, Ω o seu espaço amostral denotado por $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Qualquer função X que associa os valores de Ω em números reais é chamada de **variável aleatória discreta**

Exemplo:

Seja um experimento **E** relativo ao "lançamento simultâneo de duas moedas. Neste caso, as possibilidades obtidas, podem ser representadas pelo seguinte espaço amostral:

Ω = {(Ca,Ca),(Ca,Co),),(Co,Ca), (Co,Co)}

Seja **X** a v.a. definida como a quantidade (ou número) de **caras** que aparecem. Então, a cada ponto amostral podemos associar um número de acordo com a tabela 1:

Tabela 1

Ponto Amostral	X
(Ca,Ca)	2
(Ca,Co)	1
(Co,Ca)	1
(Co,Co)	0

Variável Aleatória

Tabela 2

Ponto Amostral	X	P(X)
(Ca,Ca)	2	1/2 x1/2 = 1/4
(Ca,Co)	1	1/2 x1/2 = 1/4
(Co,Ca)	1	1/2 x1/2 = 1/4
(Co,Co)	0	1/2 x1/2 = 1/4

Cálculo das Probabilidades

Tabela 3

X	P(X)
2	1/4
1	2/4
0	1/4
	Σ=1

Distribuição de Probabilidades

Exemplo 4

Calcular a função probabilidade **discreta** dos seguintes dados:

NOTAS (X_i)	50	60	70	90	100
FREQUÊNCIA (f_i)	1	2	2	1	4

SOLUÇÃO

Notas (x_i)	50	60	70	90	100
Freqüência Relativa $\left(\frac{fi}{n}\right)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

ATIVIDADE 02

A assistente de um Centro de Saúde, situado na região de Belo Horizonte, baseada nos dados do último censo, verifica que, para as famílias dessa região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Suponha que uma família será escolhida, aleatoriamente, nessa região, e o número de filhos averiguado. Apresente a função de probabilidade que melhor represente o comportamento da variável aleatória número de filhos.

Solução

X: número de filhos (variável aleatória) dentre 0, 1, 2, 3, 4, 5

A **função de probabilidade** dessa variável X segue as informações disponíveis que:

$P(X = 0) = 0,20 \quad P(X = 1) = 0,30 \quad$ e $\quad P(X = 2) = 0,35$

$P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = p$

Pela definição de função de probabilidades, temos que:

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 1$

$0,20 + 0,30 + 0,35 + p + p + p = 1$

$p = 0,05$.

Logo, a **função de probabilidade** para X é expressa por:

Tabela 3 Função de probabilidade para X

X	0	1	2	3	4	5	Total
p_i	0,20	0,30	0,35	0,05	0,05	0,05	1,0

Fonte: dados simulados

Ao definir a distribuição de probabilidades, estabelecemos uma correspondência unívoca entre a v.a. X e os valores de P. Isto define uma função denominada função de probabilidade, representada por:
$f(x) = P(X=x_i)$

Variáveis Aleatórias Contínua

Seja **E** um experimento aleatório que consiste em sortear uma semente.

Ω = tempo decorrido do plantio até a germinação. Estes resultados têm uma escala contínua de valores.

A variável aleatória **T** associada aos resultados do espaço amostral Ω é, neste caso, chamada de **variável aleatória contínua.**

Estatística versus Parâmetros

Estatística representa uma informação ou característica da **amostra** (*n*).

Parâmetro representa uma medida utilizada para descrever uma característica da **população** (*N*).

Quadro 1: Notações de estatísticas e parâmetros

Notações		Denominações
Estatísticas (Amostra)	**Parâmetros (População)**	
n	N	Número de elementos
$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$\mu_X = E(X)$	Média
$S_X^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$	$\sigma_X^2 = Var(X)$	Variância
$S_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$	$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$	Desvio Padrão

Fonte: elaboração da própria autora.

Parâmetros das Variáveis Discretas

Destacamos, a seguir, algumas destas características para a **variável aleatória discreta**:

- **Média de uma variável aleatória discreta (μ)** - a média de uma v. a. discreta (μ) é calculada pela expressão:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i), \qquad i = 1,2,3,\dots,n$$

OBS: A média de X é usualmente expressa por E(X), denominada esperança matemática da variável aleatória X ou valor esperado da variável aleatória X.

- **Variância de uma variável aleatória discreta (σ^2)** - a mesma analogia existe entre a variância e desvio-padrão de uma distribuição de freqüência e, a variância e desvio-padrão de uma variável aleatória X.

  A variância, é representada pela expressão:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . p(x_i) = \sigma^2$$

Exemplo

Imagine a seguinte distribuição da v.a. discreta X, referente ao Nº de cirurgias diárias numa pequena clínica:

X	3	4	5	6	7	8
P(X)	0,10	0,20	0,30	0,20	0,15	0,05

Calcule a média e a variância de X.

Solução

Para calcularmos a **média** diária de cirurgias efetuadas, basta calcular , ou seja, o somatório do produto de cada valor da variável pela sua probabilidade correspondente:

E (X) = 3 . 0,10 + 4 . 0,20 + 5 . 0,30 + 6. 0,20 + 7. 0,15 + 8 . 0,05

E (X) = 0,30 + 0,80 + 1, 50 + 1, 20 + 1,05 + 0,40

E (X) = 5,25

Portanto, diariamente são efetuadas, em média, 5,25 cirurgias.

A **variância**, Var(X), é calculada pela expressão:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 . P(X_i) = \sigma^2$$

Vamos calcular a **variância** do número de cirurgias.
Var(X) = (3 – 5,25)² . 0,10 + (4 – 5,25)² . 0,20 + (5 – 5,25)² . 0,30 + (6 – 5,25) ² . 0,20 + (7 – 5,25)² . 0,15 + (8 – 5,25)² . 0,05
Var(X) = 5,0625 . 0,10 + 1,5625 . 0,20 + 0,0625 . 0,30 + 0,5625 . 0,20 + 3,0625 . 0,15 + 7,5625 . 0,05
Var(X) = 0,50625 + 0,3125 + 0,0188 + 0,1125 + 0,4594 + 0,3781
Var(X) = 1,7876.
Portanto, o **desvio padrão** de $X = \sigma(X) = \sqrt{1,7876}$
σ (X) = 1, 3370 ≅ 1,34.
O número médio de cirurgias realizadas nesta clínica é de 5,25, com desvio padrão de 1,34.

Exemplo 5

A variável aleatória X apresentada a seguinte função densidade de probabilidade:

X	0	1	2	3	4
f(x)=P(X=x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Com base nessa distribuição determine:
a) a função distribuição acumulada
b) P(X=1)
c) a esperança
d) a variância de X.
e) P[X<E(X)]

Solução

a)

X	0	1	2	3	4
F(x)	1/16	5/16	11/16	15/16	1

b) 4/16
c) E(X)=2
d) Var X= $E(X^2)$- $(E(X))^2$= 5-2^2= 1
f) e) P[X<2]= 1/16 + 4/16= 5/16

Distribuições de Probabilidades

Quando aplicamos a Estatística na resolução de situações-problema, verificamos que muitas delas apresentam as mesmas características; o que nos permite estabelecer um modelo estatístico teórico para a determinação da resolução destas situações-problema.

Este modelo estatístico teórico, também conhecido por **distribuição de probabilidades**, apresenta algumas características principais, entre estas:

I. Os possíveis valores que a variável aleatória pode assumir;

II. A função de probabilidade associada à variável aleatória ;

III. A média (ou valor esperado) da variável aleatória ;

IV. A variância e o desvio-padrão da variável aleatória .

Neste contexto, vamos estudar algumas das principais distribuições de probabilidades discretas entre elas, a **distribuição binomial** e a **distribuição de Poisson**. E, entre as distribuições de probabilidades contínuas, a **distribuição normal**.

Distribuição Binomial

A **distribuição binomial** apresenta algumas características fáceis de ser interpretadas, isto é, supor um experimento E repetido *n* vezes independentemente; sendo que em cada repetição, dois eventos com probabilidades constantes podem ocorrer. Então seja *p* a probabilidade de **sucesso** e *q* a de **fracasso**.

Agora, imagine que estamos interessados na ocorrência de x sucessos e n-x fracassos, independente da ordem de ocorrência, desta forma temos que a variável aleatória X admite **distribuição binomial de probabilidades**.

A notação utilizada será X ≈ b(n,p) **(Lê-se a variável aleatória tem distribuição binomial com parâmetros n e p).**

Descrevendo, temos:

$$P(X=x)=\binom{n}{k}p^k\,q^{n-k} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$$

$\mu(X)=np \rightarrow$ média (ou valor esperado) da variável aleatória X.

$\sigma^2(X)=npq \rightarrow$ variância da variável aleatória X.

$\sigma(X)=\sqrt{npq} \rightarrow$ desvio padrão da variável aleatória X.

Exemplo 1

Supor o lançamento de uma moeda honesta 10 vezes. Qual a probabilidade de se obter 5 vezes o resultado cara. Apresente a conclusão para resultado obtido.

Solução

Desejamos calcular a probabilidade de sair o resultado cara (k) 5 vezes. Logo, n = 10 e p = 0,5 (probabilidade de se obter cara em cada lançamento de moeda).

Assim, $P(X=x)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

$$P(X=5)=\binom{10}{5}(0,5)^5(1-0,5)^{10-5}$$

$$P(X=5)=\frac{10!}{5!(10-5)!}(0,5)^5(1-0,5)^{10-5}$$

$$P(X=5)=\frac{10.9.8.7.6.5!}{5!5!}(0,5)^5(1-0,5)^5$$

$$P(X=5)=\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.4.1}(0,5)^5(1-0,5)^5=3.2.7.6.(0,03125).(0,03125)$$

$$P(X=5)=0,2461$$

Na tabela da distribuição binomial, disponível no livro p.126 a 128, temos que n = 10. Procuraremos p = 0,50 (a última coluna dos valores de p) e k = 5 (na coluna de k); na interseção da linha de k = 5 com a coluna de p = 0,50, encontramos o valor 0,2461.

Portanto, no lançamento de uma moeda honesta 10 vezes, a probabilidade de se obter 5 vezes o resultado cara é de aproximadamente 24%.

Tabela Binomial

Distribuição binomial

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

5
6
10

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 10
0	90438	59874	34868	10737	Q5631	02825	00605	00098	10
1	09135	31513	38742	26844	18771	12106	04031	00977	09
2	00415	07463	19371	30199	28157	23347	12093	04394	08
3	00011	01048	05739	20133	25028	26683	21499	11719	07
4	00001	00096	01116	08808	14600	20012	25082	20508	06
5	00000	00006	00149	02642	05840	10292	20066	24608	05
6	00000	00000	00014	00551	01622	03676	11148	20508	04
7	00000	00000	00001	00079	00309	00900	04247	11719	03
8	00000	00000	00000	00007	00039	00144	01062	04394	02
9	00000	00000	00000	00000	00003	00014	00157	00977	01
10	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00010	00098	00
N = 10	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	P \ X

Exemplo 2

Supor o lançamento de uma moeda honesta 10 vezes. Qual a probabilidade de se obter no máximo 2 vezes o resultado cara. Apresente a conclusão para resultado obtido.

Solução

Desejamos calcular a probabilidade de sair o resultado cara (Ca) no máximo 2 vezes. Teoricamente, a moeda poderia dar o resultado cara até 10 vezes, iniciando por 0 caras (nenhuma vez). A variável x pode, então, variar de 0 até 10, mas queremos x=0,1,2.

Portanto,

p(X=0) + p(X=1) + p(X=2).

Na tabela da distribuição binomial, disponível no livro, temos que n = 10. Procuraremos os p´s correspondentes aos k´s e obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = 0{,}0010 \\ P(1) = 0{,}0098 \\ P(2) = 0{,}0439 \end{array}\right\} \quad P(0) + P(1) + P(3) = 0{,}0547 \text{ ou } 5{,}47\%.$$

Portanto, no lançamento de uma moeda honesta 10 vezes, a probabilidade de se obter no máximo 2 vezes o resultado cara é de aproximadamente **5,5 %**.

E como você faria se quiséssemos pelo menos 3 vezes o resultado cara?

Dica:- $p(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$

Resposta: 94,53%

ATIVIDADE 03

Em um lote de peças, 5% são defeituosos. Calcule a probabilidade de, em 20 dessas peças, haver, exatamente, uma defeituosa.

Solução

Seja P(perfeita) = 0,95 e P(defeituosa) = 0,05 , logo 2 eventos com probabilidades constantes. Portanto, sendo k=1 o número de peças defeituosas temos,

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 1) = \binom{20}{1} (0{,}05)^1 (0{,}95)^{19} = 0{,}3774$$

	p 0,02	0,05
$\eta = 20$		
0	0,6676	0,3585
k = X 1	0,2725	0,3774
2	0,0528	0,1887

Na **Tabela de distribuição binomial**, vamos fazer a leitura da intersecção destes valores, isto é, temos que para $n = 20$, $p = 0{,}05$ e para o valor de $k = 1$, a **intersecção da linha de** $k = 1$ **com a coluna em** $p = 0{,}05$. **Concluímos o resultado 0,3774.**

Portanto, em um lote de peças onde 5% são defeituosos, sorteadas 20 dessas peças, a probabilidade de haver, exatamente, uma defeituosa é em torno de 37,74%.

Exercícios Enviados ...

Exercício 1:
a. Estabeleça as condições exigidas para se aplicar a distribuição binomial?
b. Qual é a probabilidade de 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?
c. Qual é a probabilidade de menos que 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?

Solução

a) A distribuição binomial é usada para encontrar a probabilidade de X números de ocorrências ou sucessos de um evento, P(X), em **n** tentativas do mesmo experimento quando:
Existirem somente 2 resultados mutuamente exclusivos;
As **n** tentativas são independentes, e;
A probabilidade de ocorrência ou sucesso, p, permanece constante em cada tentativa.

b)
$$P(X) = nC_X p^X (1-p)^{n-X} = \binom{n}{X} p^X (1-p)^{n-X} = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X}$$

Cujo resultado é: 0,03125

c)
$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$$

Cujo resultado é:
$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}03125 + 0{,}15625 + 0{,}3125 = 0{,}5$$

Exercícios Enviados ...

Exercício 2:
a. Suponha que a probabilidade dos pais terem um filho(a) com cabelos loiros seja ¼. Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas terem cabelos loiros?

Solução

a. Aqui n = 6, X = 3, p = 1/4, e q = 3/4. Substituindo estes valores na fórmula binomial, obtemos

$$P(3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.3.2.1}\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{27}{64}\right) = 20\left(\frac{27}{4096}\right) = \frac{540}{4096} \cong 0{,}13$$

b.Se a probabilidade de atingir um alvo num único disparo é 0,3, qual é a probabilidade de que em 4 disparos o alvo seja atingido no mínimo 3 vezes?

Solução

b) Aqui, em 4 disparos, no **mínimo 3 vezes** significa acontecerem 3 tiros certos e 4 tiros certos...

b. Aqui $n = 4$, $X \geq 3$, $p = 0{,}3$ e $1 - p = 0{,}7$

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4)$$

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0{,}0756 + 0{,}0081 = 0{,}0837$$

Exercícios Enviados ...

Exercício 3:

a.Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubosque se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos

Solução

a. Aqui $n = 10$, $X \leq 2$, $p = 0{,}2$ e $1 - p = 0{,}8$

$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

Assim,

$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}1074 + 0{,}2684 + 0{,}3020 = 0{,}6778$ ou 6,78%

b.

Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

Solução

b. Aqui $n = 15$, $X = 10$, $p = 0{,}85$ e $1 - p = 0{,}15$. A probabilidade de $X = 10$ itens aceitáveis com $p = 0{,}85$ é igual a probabilidade de $X = 5$ itens defeituosos com $p = 0{,}15$. Mas fazendo os cálculos encontramos:

0,0449 ou 4,5%

Desafio I

Qual a probabilidade de uma família de 4 filhos ter:

a. nenhum filho homem;
b. 1 filho homem;
c. 2 filhos homens;
d. 3 filhos homens
e. 4 filhos homens.

Interprete os resultados.

Respostas:

$P(X=0) = 1/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 1 delas não tenha filho homem.

$P(X=1) = 4/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 4 delas tenham 1 filho homem.

$P(X=2) = 6/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 6 delas tenham 2 filhos homens.

$P(X=3) = 4/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 4 delas tenham 3 filhos homens.

$P(X=4) = 1/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 1 delas tenha 4 filhos homens.

Tarefa para casa!!!!

1.Uma firma exploradora de petróleo calcula que em 5% dos poços que perfura encontra gás natural. Se ela perfurar 10 poços, determine a probabilidade de:

a) não encontrar gás natural;
b) encontrar gás natural.

Respostas:
a. n= 10, p = 0,05 e P(X=k=0) = 0,5987 ou 59,87%
b. É a probabilidade do evento complementar, ou seja,
P(x≥1) = 1 – P(X=0) = 1 – 0,5987 = 0,4013 ou 40,13%
X é o número de poços perfurados onde se encontra gás.

2. Um fabricante de móveis constatou que 10% dos móveis vendidos apresentavam problemas de fabricação. Se 20 móveis foram vendidos em uma semana, qual a probabilidade de que:
a. nenhum apresente problemas;
b. pelo menos, dois móveis apresentem problemas.

Respostas:
a. n= 20, p = 0,10 e P(X=k=0) = 0,1216 ou 12,16%
b. É a probabilidade do evento complementar, ou seja,
P(x≥2) = 1 – P(X=0) – P(X=1) = 1 – 0,1216 – 0,2702 = 1 – 0,3918 = 0,6082 ou 60,82%
X é o número de móveis apresentando problemas.

Tarefa para casa cont....

3. Numa linha de produção, 5% das peças são defeituosas. As peças são acondicionadas em caixas de 10 unidades. Qual a probabilidade de haver 1 defeituosa numa certa caixa?

Respostas:
Distribuição Binomial n= 10 e p=0,05
P(X=k=1) = 0,3151 ou 31,51%

4. Em uma certa localidade, 40% dos correntistas bancários trabalham com o banco A, e os outros com o banco B.
Em 10 correntistas aleatoriaamente escolhidos, qual a probabilidade de serem clientes do banco A:
a. exatamente 4;
b. no máximo, 1;
c. pelo menos, 2.

Respostas:
n= 10, p = 0,40
a. P(X=k=4) = 0,2508 ou 25,08%
b. P(x≤1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,0060 + 0,0403= 0,0463 ou 4,63%
X é o número de correntistas clientes do banco A.
c. P(x>1) = 1 – P(x≤1) = 1 – 0,0463 = 0,9537 ou 95,37%

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X admite distribuição de Poisson sendo expressa por:

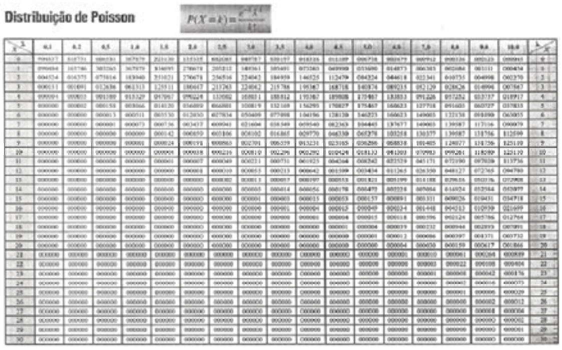
$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}, \; k=0,1,2,\cdots$$

Em que,

λ: denota o parâmetro de interesse, sendo usualmente tratado como a *taxa de ocorrência*.

μ: denota a média $\left(\mu = E(X) = \lambda\right)$.

k: denota o número de ocorrências.



Exemplos

Em uma central telefônica, o número de telefonemas, em média, podem chegar a 2 chamadas por minuto ou 2,5 chamadas por minuto, ou 3 ou 3,5, e assim por diante. Percebemos então, que a média não precisa ser composta apenas por valores inteiros. Entretanto, em um minuto, por exemplo, podem chegar 2, 3, 4, 5 chamadas; sempre números inteiros.

Em um minuto, numa central telefônica, chegam 2 chamadas. Em outro minuto, chegam 3. Determine a média de chamadas.

$$Média = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

Atenção! A média da distribuição de Poisson pode assumir qualquer valor, mas o número de ocorrências é sempre um número inteiro.

Outros exemplos da distribuição de Poisson:

1. O número de unidades de sacos de cimento consumidos em uma construção civil é de 5 unidades, em média, por dia.
2. O número de unidades de DVDs vendidos em uma loja é 6 unidades, em média, por dia.
3. O número de colisões de veículos em certo cruzamento é de 3 colisões, em média, por semana.
4. O número de pacientes atendidos por um médico é de 4 pacientes, em média, por hora.

Propriedade Importante da Poisson

Uma propriedade importante importante da distribuição de Poisson é a aditividade das médias, ou seja, se em um minuto chegam 2 chamadas em uma central telefônica, em média, em 2 minutos, a média será de 4 chamadas. Assim:

1,0 min $x = \mu = 2$ chamadas
2,0 min $x = \mu = 4$ chamadas
0,5 min $x = \mu = 1$ chamada.

Exemplo 1 de Poisson

1. O número de clientes atendidos pelo caixa de um banco é de 4, em média, por hora. Qual a probabilidade de se atender:
    a. exatamente 4 clientes em uma hora;
    b. no máximo, 2 clientes em uma hora;
    c. pelo menos, 2 clientes em uma hora.

Solução

Para resolver estas situações sem ter que efetuar as contas, é possível obter os resultados consultando a tabela de Poisson. Basta procurar a média desejada (μ, na tabela) e, em seguida, ler o valor de k. A probabilidade estará na intersecção de coluna de μ com a linha de k.

a) $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-4}4^4}{4!}$ = 0,1954

b) $P(X\le 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{4^0}{e^4.0!} + \frac{4^1}{e^4.1!} + \frac{4^2}{e^4.2!} = 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 = 0{,}2381$

c) Pelo menos 2, significa atender 2 ou mais clientes. Neste caso, são várias as possibilidades. Então, faremos o cálculo utilizando a propriedade complementar.

Nesta situação, somente não poderá atender 0 ou 1 cliente (não se esqueça do zero).

Portanto: $P(X\ge 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 =$ 0,9084

Exemplo 2 de Poisson

1. Um taxi atende, em média, dois clientes por hora. Qual a probabilidade de atender:
   a. 1 ou 2 clientes, em 1 hora;
   b. 4 ou 5 clientes, em 2 horas;
   c. nenhum cliente em meia hora.

Solução

a. em 1 hora $\mu = \lambda = 2$.

a) $P(X=1)+P(X=2) = \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} + \frac{e^{-2}(2)^2}{2!} = 0,2707 + 0,2707 = 0,5414$

b) 1 hora 2 clientes
2 horas $x = \lambda = \mu = 4$

$P(X=4) + P(X=5) = 0,1954 + 0,1563 = 0,3517$

c) 1 hora 2 clientes
0,5 hora $x = \lambda = \mu = 1$

$P(X=0) = \frac{e^{-1}(1)^0}{0!} = 0,3679$

ATIVIDADE 04

Numa colheita mecanizada de cana-de-açúcar existem várias colhedoras de certo tipo. Depois de muitas observações chegou-se à conclusão de que o número de colhedoras que se avariam em cada mês é uma variável aleatória T com distribuição de Poisson de média $\lambda = 3$, T $P_0(3)$. Qual a probabilidade para que durante um mês se avariem 7 ou mais colhedoras?

Solução

Como fornecido $T \sim Po(\lambda)$, $\lambda = 3$.

Deseja-se saber qual a probabilidade para que durante um mês se avariem sete ou mais colhedoras.

$$P(T=k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$$

T : número de colhedoras que se avariam em cada mês.
λ : média
k : número de ocorrências

$$P(T \geq k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!} \Rightarrow P(T \geq 7) = \sum_{k=7}^{\infty} \frac{e^{-3}(3)^k}{k!} \rightarrow \textbf{Tabela de Poisson}$$

Para obter o resultado consultando a **Tabela de Poisson** (ao final deste capítulo), basta procurar a média desejada, $\lambda = 3$ (λ, equivale a μ na Tabela de Poisson que apresentamos), e, em seguida, ler o valor correspondente de k. A probabilidade é obtida pela intersecção da coluna de μ com a linha de k.

Atenção! Observe que, neste caso, como $T \geq 7$ vamos somar todas as intersecções da coluna de μ com a linha de k a partir de $k = 7$ até o final da coluna de $\mu = 3$. E, na **Tabela de Poisson** para $\mu = 3$ o último valor tabelado para k corresponde a 13 (valor $0,000$).

$$P(T \geq 7) = 0,0216 + 0,0081 + 0,0027 + 0,0008 + 0,0002 + 0,0001$$

$$P(T \geq 7) = 0,0335$$

6	0,0504
7	0,0216
8	0,0081
9	0,0027
10	0,0008
11	0,0002
12	0,0001
13	0,000
14	

Concluímos que durante um mês a probabilidade que se avariem sete ou mais colhedoras de cana-de-açúcar é de 3,35%.

Exercício 1 –

a. Qual é a diferença entre as distribuições de Poisson e Binomial?
b. Dê alguns exemplos de quando podemos aplicar a distribuição de Poisson.
c. Dê a fórmula da distribuição de Poisson e o significado dos vários símbolos.

Solução

a. Enquanto a distribuição binomial pode ser usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos em n tentativas, a distribuição de Poisson é usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos por unidade de intervalo[1]. As outras condições exigidas para se aplicar a distribuição Binomial são também exigidas para se aplicar a distribuição de Poisson; isto é, (1) deve existir somente dois resultados mutuamente exclusivos, (2) os eventos devem ser independentes, e (3) o número médio de sucessos por unidade de intervalo deve permanecer constante.

b. A distribuição de Poisson é frequentemente usada em pesquisa operacional na solução de problemas administrativos. Alguns exemplos são o número de chamadas telefônicas para a polícia por hora, o número de clientes chegando a uma bomba de gasolina por hora, e o número de acidentes de tráfego num cruzamento por semana.

c. A probabilidade de um número designado de sucessos por unidade de intervalo, P(X), pode ser encontrada por:

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}$$

onde X: número designado de sucessos
λ: o número médio de sucessos num intervalo específico
e: A base do logaritmo natural, ou 2,71828

Dado o valor de λ, podemos encontrar $e^{-\lambda}$, substituindo na fórmula, e encontrar P(X). Note que λ é a média e a variância da distribuição de Poisson.

Exercício 2 – enviado

2. Um departamento de polícia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de receber 2 solicitações numa hora selecionada aleatoriamente?

Solução

X = número designado de sucessos = 2
λ = o número médio de sucessos num intervalo específico (uma hora) = 5

$$P(2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 0{,}08422434 \quad \text{ou} \quad 8{,}42\%$$

Desafio I

1. Na pintura de paredes de uma sala aparecem defeitos na proporção de 1 para cada m² de pintura. Determine a probabilidade de:

a. não haver defeitos na pintura de uma parede de 2 m x 2,5 m;

b. encontrarmos, no máximo, dois defeitos na mesma parede.

Respostas:

1 m² de parede tem, em média, 1 defeito por pintura. Uma parede de 2m x 2,5 m = 5 m² têm, em média, 5 defeitos. Portanto, $\mu = 5$.

a. $P(X=0) = \frac{5^0}{e^5 0!} = 0{,}0067$ ou 0,67%

b. $P(0) + P(1) + P(2) = \frac{5^0}{e^5 0!} + \frac{5^1}{e^5 1!} + \frac{5^2}{e^5 2!} = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246$ ou 12,46%.

2. Em um hospital, um médico atende, em média, 3 pacientes por hora. Qual a probabilidade dele atender:

a. 3 ou 4 pacientes em 1 hora;

b. no máximo, 2 pacientes em 1 hora;

c. pelo menos, 4 pacientes em 1 hora.

Respostas:

Os cálculos das probabilidades são lidos na tabela da Distribuição de Poisson.

$\mu = 3$

a. $P(3) + P(4) = \frac{3^3}{e^3.3!} + \frac{3^4}{e^3.4!} = 0{,}2240 + 0{,}1680 = 0{,}3920$ ou 39,20%.

b. $P(0) + P(1) + P(2) = \frac{3^0}{e^3.0!} + \frac{3^1}{e^3.1!} + \frac{3^2}{e^3.2!} =$

$0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$ ou 42,32% .

c. $P(x \geq 4) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) =$

$1 - 0{,}0498 - 0{,}1494 - 0{,}2240 - 0{,}2240 = 1 - 0{,}6472 = 0{,}3528$ ou 35,28%

Tarefa para casa!!!!

Numa cidade de 25.000 habitantes, ocorrem em média 2 suicídios, por ano. Qual a probabilidade de:
a) ocorrerem pelo menos 1 suicídio, em 1 ano?;
b) não haver nehum suicídio, em 1 ano.

Respostas: $\mu = \lambda = 1$
a) $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{1^0}{e^1.0!} = 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321$ ou $63{,}21\%$
b) $P(x = 0) = \frac{1^0}{e^1.0!} = 0{,}3679$ ou $36{,}79\%$.

2. Caminhões chegam a um depósito à razão de 3 caminhões/hora. Determine a probabilidade de chegarem dois ou mais caminhões:
a. num período de 30 minutos;
b. no período de 1 hora.

Respostas:

a) Como são 3 caminhões / hora, em ½ hora teremos 1,5 caminhões, em média.

1 hora --------- 3 caminhões
½ hora --------- x = 1,5 = μ. Então, trabalharemos com média = 1,5.

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x = 0) - P(x = 1) = 1 - \frac{1{,}5^0}{e^{1,5}.0!} - \frac{1{,}5^1}{e^{1,5}.1!} = 1 - 0{,}2231 - 0{,}3341 = 0{,}4422.$$

b) Em 1 hora, a média será μ = 3.

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x = 0) - P(x = 1) = 1 - \frac{3^0}{e^3.0!} - \frac{3^1}{e^3.1!} = 1 - 0{,}0498 - 0{,}1494 = 0{,}8008.$$

Tarefa para casa cont....

3. Numa central telefônica chegam, em média, 4 chamadas por minuto. Qual a probabilidade de ocorrer em um minuto:
a) exatamente 4 chamadas;
b) no máximo, 1 chamada.

Distribuição de Poisson com μ = 4.
a) $P(x = 4) = \frac{4^4}{e^4 4!} = 0{,}1954$.
valor: 4 pontos.
b) $P(0) + P(1) = \frac{4^0}{e^4.0!} + \frac{4^1}{e^4.1!} = 0{,}0183 + 0{,}0733 = 0{,}0916$ ou $9{,}16\%$.

4. Uma empresa recebe, em média, um telegrama por dia útil. Qual a probabilidade de que, em uma semana com 5 dias úteis, essa empresa receba:
a) exatamente 5 telegramas?
b) pelo menos 1 telegrama?

Distribuição de Poisson com μ = 5.
a) $P(x = 5) = \frac{5^5}{e^5 5!} = 0{,}1755$.

b) $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{5^0}{e^5.0!} = 1 - 0{,}0067 = 0{,}9933$.

Tarefa para casa cont....

5. O tempo de atendimento de um cliente num banco é uma variável normalmente distribuída, com média de 15 min e desvio padrão de 3 min. Qual a probabilidade de um cliente ser atendido em:

a) mais de 15 min;
b) entre 15 e 18 min;
c) entre 12 e 15 min;
d) entre 12 e 18 min.

Distribuição Normal com μ = 15 e σ = 3

a) $P(x > 15) = P(z > 0) = 0{,}5$ ou 50%.

b) $P(15 < x < 18) = P\left(\frac{15-15}{3} < z < \frac{18-15}{3}\right) = P(0 < z < 1) = 0{,}3413$

c) $P(12 < x < 15) = P\left(\frac{12-15}{3} < z < \frac{15-15}{3}\right) = P(-1 < z < 0) = P(0 < z < 1) = 0{,}3413$.

d) $P(12 < x < 18) = P\left(\frac{12-15}{3} < z < \frac{18-15}{3}\right) = P(-1 < z < 1) = 2.P(0 < z < 1) = 2.0{,}3413 = 0{,}6826$.

6. O número de *e-mails* recebidos por um estudante, diariamente, tem média igual a cinco. Qual a probabilidade dele receber, diariamente:

a) exatamente cinco;
b) no máximo, 2;
c) pelo menos, 3 emails.

Distribuição de Poisson com μ = 5

a) $P(x = 5) = \frac{5^5}{e^5 5!} = 0{,}1755$.

b) $P(0) + P(1) + P(2) = \frac{5^0}{e^3.0!} + \frac{5^1}{e^3.1!} + \frac{5^2}{e^3.2!} = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246$.

c) $1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - \frac{5^0}{e^3.0!} - \frac{5^1}{e^3.1!} - \frac{5^2}{e^3.2!} =$
$1 - 0{,}0067 - 0{,}0337 - 0{,}0842 = 1 - 0{,}1246 = 0{,}8754$.

Tarefa para casa cont....

7. Um comerciante de carros usados vende, em média, 2,5 automóveis de um certo modelo, diariamente. Qual a probabilidade de vender, em um dia:

a) 2 ou 3 carros;
b) 3 ou 4 carros desse modelo.

Distribuição de Poisson com μ = 2,5

a) $P(2) + P(3) = \frac{2{,}5^2}{e^{2,5}.2!} + \frac{2{,}5^3}{e^{2,5}.3!} = 0{,}2565 + 0{,}2138 = 0{,}4703$ ou 47,03%.

b) $P(3) + P(4) = \frac{2{,}5^3}{e^{2,5}.3!} + \frac{2{,}5^4}{e^{2,5}.4!} = 0{,}2138 + 0{,}1336 = 0{,}3474$ ou 34,74%.

8.

μ ou λ

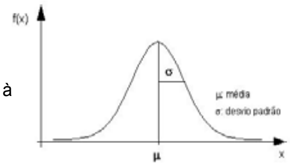
k	2	2,5
0	0,1353	0,0821
1	0,2707	0,2052
2	0,2707	0,2565
3	0,1804	0,2138
4	0,0902	0,1336
5	0,0361	0,0068
6	0,0120	0,0278
7	0,0034	0,0099
8	0,0009	0,0031
9	0,0002	0,0009
10	0,0000	0,0002

Distribuição Normal (contínua)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2. É considerada a mais importante e freqüente distribuição utilizada na Estatística e, em quase todos os processos industriais o comportamento da variável, em estudo, é semelhante ao apresentado pela distribuição normal, ou seja, num processo qualquer, com média μ (lê-se *mi*) e desvio padrão σ (lê-se *sigma*), observamos que:

É uma distribuição de v.a. Contínua e considerada a mais importante e frequente distribuição utilizada em estatística.
Quase todos os processos industriais têm com-portamento ditado pela Normal.

I. A maioria dos valores se concentra ao redor da média.
II. 50% dos valores estão acima da média, e 50% abaixo da média.
III. Os valores distribuem-se simetricamente à esquerda e à direita em relação à média.
IV. É praticamente nula a probabilidade de um valor afastar-se muito da média.



Logo, pelas **propriedades** do **valor esperado** $E(X)$ e da **variância** σ^2, segue que:

$$E(X)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}\left[E(X)-\mu\right]=0.$$

$$Var(X)=Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}Var(X)=1$$

Distribuição Normal cont....

Todas as variáveis normais, como por exemplo, a altura das pessoas, o peso de um produto, etc. são resolvidas reduzindo-as à chamada variável normal reduzida z definida por :

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

Atenção! Observe que a transformação realizada não "afeta" a normalidade e, assim a variável terá distribuição normal com média 0 e variância 1, isto é, $Z \sim N(0,1)$ e, será denotada de **normal padrão** ou **normal reduzida.**

$$P(a \le X \le b) = P(a-\mu \le X-\mu \le b-\mu)$$
$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Desta forma, quaisquer que sejam os valores de μ e σ, utilizamos a **normal padrão** para obter probabilidades com distribuição normal. Os valores para a probabilidade $P(0 \le Z \le z), z>0$ são tabelados e apresentados na **Tabela de distribuição normal**, (disponível ao final deste capítulo).

Note que a simetria também implica que a probabilidade de estar *acima* (ou *abaixo*) de zero é 0,5. E como probabilidade é sempre um valor entre 0 e 1; a **Tabela de distribuição normal** contém apenas a parte decimal.

Considerando $X \sim N(2,9)$ temos,

$$P(a \le X \le b) = P(a-\mu \le X-\mu \le b-\mu)$$

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow$$ No exemplo, $\mu = 2$

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Supondo, $X \in [2,5]$

$$P(2 \le X \le 5) = P\left(\frac{2-2}{\sqrt{9}} < \frac{X-2}{\sqrt{9}} < \frac{5-2}{\sqrt{9}}\right) =$$

$$= P(0 < Z < 1) = 0,3413$$

Exemplo

Considerando a mesma distribuição supracitada, $X \sim N(2,9)$, encontre a probabilidade a seguir:

$$P(X>3)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{3-2}{3}\right)=P(Z>1/3)$$

$$=0,5-P\left(0\leq Z<\frac{1}{3}\right)=0,5-0,1293=0,3707\,.$$

Para encontrar o valor 0,1293, resultante da probabilidade $P(0\leq Z<1/3)$ na **Tabela de distribuição normal**, basta realizar a intersecção da coluna z_0 correspondente ao valor 0,3 $(1/3\cong 0,33)$ com a linha assumindo valor 3 também; resultado da aproximação da razão $1/3$.

Tabela Distribuição Normal - Valores de $P(0\leq Z\leq z_0)$

z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879

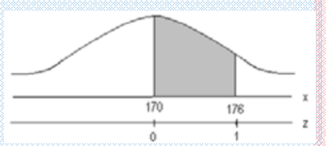
Exemplo 2

A altura dos alunos da Uniube é normalmente distribuída com a média de 170cm, e desvio padrão 6cm . Determine a probabilidade de um aluno, aleatoriamente selecionado, ter altura:

a) entre 170 e 176 cm;
b) entre 164 e 176 cm;
c) entre 176 e 182 cm;
d) acima de 182 cm.

Temos, primeiramente, que encontrar a *variável normal reduzida* z: $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$.

a)



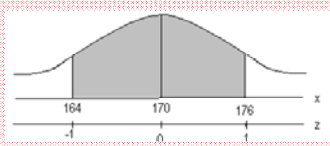
$$z=\frac{170-170}{6}=0$$

$$z=\frac{176-170}{6}=1$$

$P(170\leq x\leq 176) =\ P(0\leq z\leq 1) = 0,3413$ ou 34,13% .

0,8	0,2881	0,2910
0,9	0,3159	0,3186
1,0	0,3413	0,3438

b)



$$P(164\leq x\leq 176)=P\left(\frac{164-170}{6}\leq z\leq\frac{176-170}{6}\right)=$$

$P(-1\leq z\leq 1) = P(-1\leq z\leq 0) + p(o\leq z\leq 1)$ . .

Como é possível observar, dividimos a probabilidade em duas: uma parte do lado esquerdo da curva e a outra do lado direito; a do lado esquerdo, transformamos por simetria para o lado direito; a do lado direito, obtemos pela localização dos valores de P e de z na tabela de distribuição normal.

$P(-1\leq z\leq 1) = P(0\leq z\leq 1)$, por simetria.

Então, $P(0\leq z\leq 1) = 2P(0\leq z\leq 1) = 2.\ 0,3413 = 0,6826$ ou 68,26% . .

ATIVIDADE 05

Uma variedade de soja, sofrendo de certa praga, é submetida a um controle intensivo, cujo tempo foi modelado por uma densidade normal, com média 15 e desvio padrão 2 (em dias). Calcule . Apresente a conclusão para o resultado obtido.

Solução

Seja X o tempo de extermínio da praga e, assim temos $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, isto é, $X \sim N(15,4)$. Como desejamos saber qual a proporção, dessa variedade de soja, que demora mais de 17 dias para o extermínio da praga, calculamos:

$$P(X>17)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{17-15}{\sqrt{4}}\right)=P(Z>1)$$

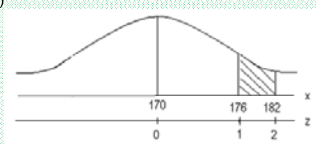
$$=0,5-P(0\le Z<1)=0,5-0,3413=0,1587$$

Portanto, a proporção dessa variedade de soja em demorar mais de 17 dias para o extermínio da praga é de 15,87%.

Atenção! Para encontrar o valor 0,3413, resultante da probabilidade $P(0\le Z<1)$ na Tabela de distribuição normal, basta realizar a leitura da coluna z_0 correspondente ao valor 1 e**, subtrair** *de* 0,5 o valor encontrado.

Exemplo 2 cont....

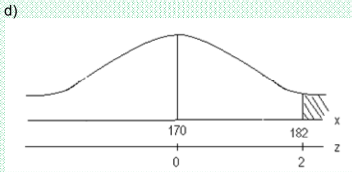
c)



P(176 ≤ 182) = P(1≤ z ≤ 2) =
P(0 ≤ z ≤ 2) - P(0 ≤ z ≤ 1) = 0,4772 - 0,3413 = 1,1359 ou 13,59%.

0,8	0,2881
0,9	0,3159
1,0	0,3413
1,1	0,3643
1,2	0,3849
1,3	0,4032
1,4	0,4192
1,5	0,4332
1,6	0,4452
1,7	0,4554
1,8	0,4641
1,9	0,4713
2,0	0,4772
2,1	0,4821

d)



P(x >182) = P(z >2) = 0,5 - P(0 ≤ z ≤ 2) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228 ..

Lembre-se que todo o ramo direito da curva tem probabilidade de 50% ou 0,5.

Exercício enviado....

Exercício 1.4. Num processo industrial tem-se μ = 10,00 com σ = 0,02. Qual é a probabilidade de se encontrar, numa amostra retirada aleatoriamente desse processo, um resultado igual ou maior que:

a) 10,03 ? b) 10,04 ?

Resposta (comparar com a figura 1):

a) $P_{(X > 10,03)} \Rightarrow z = (10,03 - 10,00)/0,02 = 1,5 \Rightarrow A = 0,4332$
Resultado: 0,50 – 0,4332 = 6,68%

b) $P_{(X > 10,04)} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow A = 0,4772$
Resultado: 0,50 – 0,4772 = 2,28%.

Exercício 1.5. Numa panificadora admite-se que um pacote de 1 kg pode ter uma variação de ± 10 g. Qual é a probabilidade de ser encontrado um pacote com:

a) 1015 g?
b) Mais de 1015 g?

b) A probabilidade de se encontrar um pacote com qualquer peso maior que 1015 g é dada pela integral (área sob a curva normal) no intervalo colorido de cinza da figura 1. O cálculo é realizado como segue:
$P_{(X > 1015)} \Rightarrow z = (1015 - 1000)/10 = 1,5 \Rightarrow A = 0,4332$

Resultado: 0,50 – 0,4332 = 6,68%

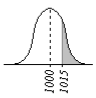


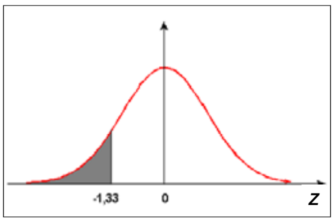
Figura 1

Exercício enviado da UNIUBE

O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.
a) Sorteando um aluno ao acaso, qual é a probabilidade que ele termine o exame antes de 100 minutos?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120; 15^2)$

$$P(X < 100) = P\left(Z \le \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \le -1{,}33)$$



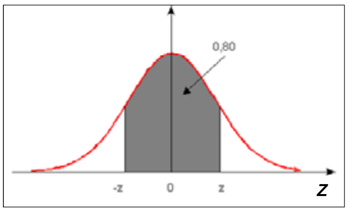
$$= 1 - A(1{,}33)$$
$$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

Exercício enviado da UNIUBE

b) Qual deve ser o tempo de prova de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

***X*: tempo gasto no exame vestibular** $\Rightarrow X \sim N(120, 15^2)$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \le Z \le \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0{,}80$$



***z* = ? tal que A(*z*) = 0,90**

Pela tabela, *z* = 1,28.

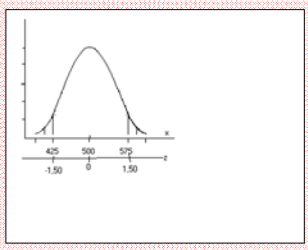
$$\frac{x_1 - 120}{15} = -1{,}28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100{,}8 \text{ min.}$$

$$\frac{x_2 - 120}{15} = 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139{,}2 \text{ min.}$$

Desafio I Normal

1. A durabilidade de um certo componente eletrônico é normalmente distribuída com média de 500 dias e desvio padrão de 50 dias. Qual a probabilidade de um componente qualquer durar:
a) entre 425 e 575 dias;
b) mais de 575 dias;
c) menos de 575 dias;
d) qual o número de dias necessários para se repor, no máximo, 10% dos componentes?

μ = 500 e
σ = 50



1,3	0,4032
1,4	0,4192
1,5	0,4332
1,6	0,4452

a) P(425 < x < 575) =

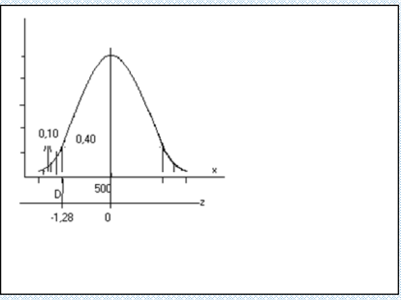
$$P\left(\frac{425-500}{50} < z < \frac{575-500}{50}\right) = P(-1{,}50 < z < 1{,}50) =$$
$$P(-1{,}50 < z < 0) + P(0 < z < 1{,}50) =$$
$$P(0 < z < 1{,}50) + P(0 < z < 1{,}50) =$$
$$2P(0 < z < 1{,}50) = 2.(0{,}4332) = 08664 \text{ ou } 86{,}64\%.$$

b) $$P(x > 575) = P\left(z > \frac{575-500}{50}\right) =$$
$$P(z > 1{,}50) = 0{,}50 - P(0 < z < 1{,}50) =$$
$$0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668 \text{ ou } 6{,}68\%.$$

c) $$P(x < 575) = P(z < 1{,}50) = 0{,}50 + P(0 < Z < 1{,}50) =$$
$$0{,}50 + 0{,}4332 = 0{,}9332 \text{ ou } 93{,}32\%.$$

Desafio I cont....

d)



A Tabela da Distribuição Normal somente nos fornece valores à direita da média, portanto com z positivo. Pelo gráfico ao lado do nosso problema, vemos que z se encontra à esquerda da média, portanto será negativo e deverá ser determinado por simetria.

Vemos que entre D e a média 500, temos 40% de probabilidade. Temos aí o problema de leitura inversa de z, que deverá ser determinado. Lendo na tabela da normal os valores das **probabilidades,** temos 0,3997 e 0,4015 como os valores mais próximos de 0,40 ou 40% e escolhemos, portanto, o valor 0,3997 (mais próximo de 0,40), que corresponde na tabela ao valor de z = 1,28. Mas, lembre-se que a tabela fornece somente valores positivos de z (à direita da média); portanto, o nosso z será = -1,28, pois se encontra à esquerda da média.

$$\text{Como } z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1{,}28 = \frac{D-500}{50} \Rightarrow D = 500 - 64 = 436 \text{ dias.}$$

Desafio I

2. Numa distribuição normal, 50% dos dados são inferiores a 200, e 34,13% estão entre 200 e 250. Calcule a média e o desvio padrão da distribuição normal.

Distribuição Normal:
Como na Distribuição Normal 50% dos dados estão abaixo da média, nesse caso a média será igual a 200, portanto μ = 200.
Teremos, então, que $P(200 < x < 250) = 0{,}3413 \Rightarrow P(0 < z < z_0) = 0{,}3413$.
Lendo, na tabela da normal, o valor de z, que corresponde a uma probabilidade 0,3413, encontramos que $z_0 = 1$. E esse valor de z corresponde ao valor de x = 250.
Temos, então $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1 = \frac{250-200}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 50$. Assim, μ = 200 e σ = 50.

Tarefa para casa!!!!

1. As notas de uma avaliação são normalmente distribuídas, com média 70 e desvio padrão 8. Determine a porcentagem dos alunos que têm nota:

a) entre 70 e 74;
b) acima de 74;
c) abaixo de 62;
d) entre 62 e 78.

$\mu = 70$ e $\sigma = 8$

a) $P(70 < x < 74) = P\left(\frac{70-70}{8} < z < \frac{74-70}{8}\right) = P(0 < z < 0{,}50) = 0{,}1915$ ou 19,15%.

b) P(x > 74) = P(z > 0,50) = 0,50 – P(0 < z < 0,50) = 0,50 – 0,1915 = 0,3085 ou 30,85%.

c) P(x < 62) =

$P\left(z < \frac{62-70}{8}\right) = P(z < -1) = P(z > 1) =$

$0{,}5 - P(0 < z < 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$.

d) $P(62 < x < 78) = P\left(\frac{62-70}{8} < z < \frac{78-70}{8}\right) = P(-1 < z < 1) =$

$2P(0 < z < 1) = 2.0{,}3413 = 0{,}6826$.

0,8	0,2881	0,2910
0,9	0,3159	0,3186
1,0	0,3413	0,3438

0,3	0,1179
0,4	0,1554
0,5	0,1915
0,6	0,2257

Tarefa para casa!!!!

2. Certas lâmpadas têm durabilidade, normalmente distribuídas, com média de 5.000 horas e desvio padrão de 100 horas. Determine a probabilidade de uma lâmpada qualquer durar:

a) entre 4.900 e 5.150 horas;
b) acima de 5.100 horas;
c) abaixo de 4.800 horas;
d) abaixo de 5.150 horas.

$\mu = 5000$ e $\sigma = 100$

a) $P(4900 < x < 5150) = P\left(\frac{4900-5000}{100} < z < \frac{5150-5000}{100}\right) = P(-1 < z < 1{,}50) =$

$= P(-1 < z < 0) + P(0 < z < 1{,}50) = P(0 < z < 1) + P(0 < z < 1{,}50) =$

$0{,}3413 + 0{,}4332 = 0{,}7745$.

b) $P(x > 5100) = P\left(z > \frac{5100-5000}{100}\right) =$

$P(z > 1) = 0{,}5 - P(0 < z < 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$.

c) $P(x < 4800) = P\left(z < \frac{4800-5000}{100}\right) = P(z < -2) = P(z > 2) =$

$0{,}5 - P(0 < z < 2) = 0{,}50 - 0{,}4772 = 0{,}0228$.

d) $P(x < 5150) = P\left(z < \frac{5150-5000}{100}\right) = P(z < 1{,}50) = 0{,}50 + 0{,}4332 = 0{,}9332$.

1,3	0,4032
1,4	0,4192
1,5	0,4332
1,6	0,4452

Tarefa para casa!!!!

3. Certo produto tem peso normalmente distribuído com média 20 e desvio padrão 1. Qual a probabilidade de um produto aleatoriamente selecionado pesar:
a) entre 19 e 21;
b) mais de 20;
c) mais de 21;
d) menos de 21.

$\mu = 20$ e $\sigma = 1$
a)

$$P(19 < x < 21) = P\left(\frac{19-20}{1} < z < \frac{21-20}{1}\right) = P(-1 < z < 1) = 2P(0 < z < 1) = 2.0,3413 = 0,6826$$

b) $P(x > 20) = P(z > 0) = 0,50$ ou 50% (acima da média temos 50% de probabilidade).

c) $P(x > 21) = P\left(z > \frac{21-20}{1}\right) = P(z > 1) = 0,50 - P(0 < z < 1) = 0,50 - 0,3413 = 0,1587$.

d) $P(x < 21) = 1 - P(x > 21) = 1 - 0,1587 = 08413$ (P(x>21) foi calculado no item anterior).

Tarefa para casa!!!!

4. Em indivíduos sadios o consumo renal de oxigênio tem distribuição normal de média 12 cm³ por minuto, e desvio padrão 1,5 cm³ por minuto. Determinar a proporção de indivíduos sadios com consumo renal:
a) Entre 9,4 e 13,2 cm³ por minuto;
b) Acima de 10 cm³ por minuto.

Distribuição Normal com $\mu = 12$ e $\sigma = 1,5$

a) $P(9,4 < x < 13,2) = P\left(\frac{9,4-12}{1,5} < z < \frac{13,2-12}{1,5}\right) =$

$P(-1,73 < z < 0,80) = 0,4582 + 0,2881 = 0,7463$.

b) $P(x > 10) = P\left(z > \frac{10-12}{1,5}\right) = P(z > -1,33) = 0,4082 + 0,5 = 0,9082$

0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664

Tarefa para casa!!!!

5. O tempo de atendimento de um cliente num banco é uma variável normalmente distribuída, com média de 15 min e desvio padrão de 3 min. Qual a probabilidade de um cliente ser atendido em:
a) mais de 15 min;
b) entre 15 e 18 min;
c) entre 12 e 15 min;
d) entre 12 e 18 min.

0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664

a) $P(x>15)=P(z>0)=0{,}5$ ou 50%.

b) $P(15<x<18)=P\left(\frac{15-15}{3}<z<\frac{18-15}{3}\right)=P(0<z<1)=0{,}3413$

c) $P(12<x<15)=P\left(\frac{12-15}{3}<z<\frac{15-15}{3}\right)=P(-1<z<0)=P(0<z<1)=0{,}3413$.

d)

$P(12<x<18)=P\left(\frac{12-15}{3}<z<\frac{18-15}{3}\right)=P(-1<z<1)=2.P(0<z<1)=2.0{,}3413=0{,}6826$

Tarefa para casa!!!!

5. Uma distribuição de variável normal tem média 100 e desvio padrão 20. Qual a probabilidade dessa variável estar:
a) acima de 100;
b) entre 90 e 100;
c) acima de 110.

Distribuição Normal com μ = 100 e σ = 20

a) $P(x>100)=P(z>0)=0{,}5$ ou 50%.

b)

$P(90<x<100)=P\left(\frac{90-100}{20}<z<\frac{100-100}{20}\right)=P(-0{,}50<z<0)=P(0<z<0{,}50)=0{,}1915$.

c) $P(x>110)=P\left(z>\frac{110-100}{20}\right)=P(z>0{,}50)=0{,}50-P(0<z<0{,}50)=$
$0{,}50-0{,}1915=0{,}3085$.

0,4	0,1554
0,5	0,1915
0,6	0,2257

Distribuição binomial

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

5
6
10

n = 5

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 5
0	95099	77378	59049	32768	23730	16807	07776	03125	05
1	04803	20363	32805	40960	39551	36015	25920	15625	04
2	00097	02143	07290	20480	26367	30870	34560	31250	03
3	00001	00113	00810	05120	08789	13230	23040	31250	02
4	00000	00003	00045	00640	01465	02835	07680	15625	01
5	00000	00000	00001	00032	00098	00243	01024	03125	00
N = 5	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	P \ X

n = 6

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 6
0	94148	73509	53144	26214	17798	11765	04666	01563	06
1	05706	23213	35429	39322	35596	30253	18662	09375	05
2	00144	03055	09842	24576	29663	32413	31104	23437	04
3	00002	00214	01458	08192	13184	18522	27648	31250	03
4	00000	00009	00122	01536	03296	05953	13824	23437	02
5	00000	00000	00005	00154	00439	01021	03686	09375	01
6	00000	00000	00000	00006	00024	00073	00410	01563	00
N = 6	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	P \ X

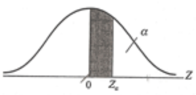
n = 10 ↓P

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 10
0	90438	59874	34868	10737	Q5631	02825	00605	00098	10
1	09135	31513	38742	26844	18771	12106	04031	00977	09
2	00415	07463	19371	30199	28157	23347	12093	04394	08
3	00011	01048	05739	20133	25028	26683	21499	11719	07
4	00001	00096	01116	08808	14600	20012	25082	20508	06
5	00000	00006	00149	02642	05840	10292	20066	24608	05
6	00000	00000	00014	00551	01622	03676	11148	20508	04
7	00000	00000	00001	00079	00309	00900	04247	11719	03
8	00000	00000	00000	00007	00039	00144	01062	04394	02
9	00000	00000	00000	00000	00003	00014	00157	00977	01
10	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00010	00098	00
N = 10	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	P \ X

Tabelas de distribuições

Distribuição normal: $N(0, 1)$

$$P(0 < Z < Z_\alpha) = \alpha$$



Z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	Z_α
0,00	−0,000000	0,003989	0,007978	0,011967	0,015953	0,019939	0,023922	0,027903	0,031881	0,035856	0,00
0,10	0,039828	0,043795	0,047758	0,051717	0,055670	0,059618	0,063559	0,067495	0,071424	0,075345	0,10
0,20	0,079260	0,083166	0,087064	0,090954	0,094835	0,098706	0,102568	0,106420	0,110261	0,114092	0,20
0,30	0,117911	0,121719	0,125516	0,129300	0,133072	0,136831	0,140576	0,144309	0,148027	0,151732	0,30
0,40	0,155422	0,159097	0,162757	0,166402	0,170031	0,173645	0,177242	0,180822	0,184386	0,187933	0,40
0,50	0,191462	0,194974	0,198468	0,201944	0,205402	0,208840	0,212260	0,215661	0,219043	0,222405	0,50
0,60	0,225747	0,229069	0,232371	0,235653	0,238914	0,242154	0,245373	0,248571	0,251748	0,254903	0,60
0,70	0,258036	0,261148	0,264238	0,267305	0,270350	0,273373	0,276373	0,279350	0,282305	0,285236	0,70
0,80	0,288145	0,291030	0,293892	0,296731	0,299546	0,302338	0,305106	0,307850	0,310570	0,313267	0,80
0,90	0,315940	0,318589	0,321214	0,323814	0,326391	0,328944	0,331472	0,333977	0,336457	0,338913	0,90
1,00	0,341345	0,343752	0,346136	0,348495	0,350830	0,353141	0,355428	0,357690	0,359929	0,362143	1,00
1,10	0,364334	0,366500	0,368643	0,370762	0,372857	0,374928	0,376976	0,378999	0,381000	0,382977	1,10
1,20	0,384930	0,386860	0,388767	0,390651	0,392512	0,394350	0,396165	0,397958	0,399727	0,401475	1,20
1,30	0,403199	0,404902	0,406582	0,408241	0,409877	0,411492	0,413085	0,414656	0,416207	0,417736	1,30
1,40	0,419243	0,420730	0,422196	0,423641	0,425066	0,426471	0,427855	0,429219	0,430563	0,431888	1,40
1,50	0,433193	0,434478	0,435744	0,436992	0,438220	0,439429	0,440620	0,441792	0,442947	0,444083	1,50

Distribuição de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

$X \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	λ / X
0	904837	818731	606531	367879	223130	135335	082085	049787	030197	018316	011109	006738	002479	000912	000336	000123	000045	0
1	090484	163746	303265	367879	334695	270671	205212	149361	105691	073263	049990	033690	014873	006383	002684	001111	000454	1
2	004524	016375	075816	183940	251021	270671	256516	224042	184959	146525	112479	084224	044618	022341	010735	004998	002270	2
3	000151	001091	012636	061313	125511	180447	213763	224042	215786	195367	168718	140374	089235	052129	028626	014994	007567	3
4	000004	000055	001580	015329	047067	090224	133602	168031	188812	195367	189808	175467	133853	091226	057252	033737	018917	4
5	000000	000002	000158	003066	014120	036089	066801	100819	132169	156293	170827	175467	160623	127718	091603	060727	037833	5
6	000000	000000	000013	000511	003530	012030	027834	050409	077098	104196	128120	146223	160623	149003	122138	091090	063055	6
7	000000	000000	000001	000073	000756	003437	009941	021604	038549	059540	082363	104445	137677	149003	139587	117116	090079	7
8	000000	000000	000000	000009	000142	000859	003106	008102	016865	029770	046330	065278	103258	130377	139587	131756	112599	8
9	000000	000000	000000	000001	000024	000191	000863	002701	006559	013231	023165	036266	068838	101405	124077	131756	125110	9
10	000000	000000	000000	000000	000004	000038	000216	000810	002296	005292	010424	018133	041303	070983	099261	118580	125110	10
11	000000	000000	000000	000000	000001	000007	000049	000221	000731	001925	004264	008242	022529	045171	072190	097020	113736	11
12	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000010	000055	000213	000642	001599	003434	011265	026350	048127	072765	094780	12
13	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	000013	000057	000197	000553	001321	005199	014188	029616	050376	072908	13
14	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000003	000014	000056	000178	000472	002228	007094	016924	032384	052077	14
15	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000003	000015	000053	000157	000891	002311	009026	019431	034718	15
16	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	000015	000049	000334	001448	004513	010930	021699	16
17	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	000015	000118	000596	002124	005786	012764	17
18	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	000039	000232	000944	002893	007091	18
19	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000012	000086	000397	001371	003732	19
20	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000004	000030	000159	000617	001866	20
21	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000010	000061	000264	000889	21
22	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000003	000022	000108	000404	22
23	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000008	000042	000176	23
24	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	000016	000073	24
25	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000006	000029	25
26	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	000012	26
27	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004	27
28	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000002	28
29	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	29
30	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	30