PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Curso de Matemática

Probabilidades

Bertolo

OBJETIVOS

- Definir probabilidade;
- Identificar situações práticas às quais se aplica a probabilidade;
- Definir experimento, espaço amostral e evento;
- Distinguir as três definições de probabilidade: clássica, frequentista e subjetiva;
- Identificar situações práticas em que cada uma das definições de probabilidade é aplicada;
- Calcular probabilidades;
- Aplicar o princípio básico da regra de Bayes na resolução de situações-problema.

Esquema do Capítulo

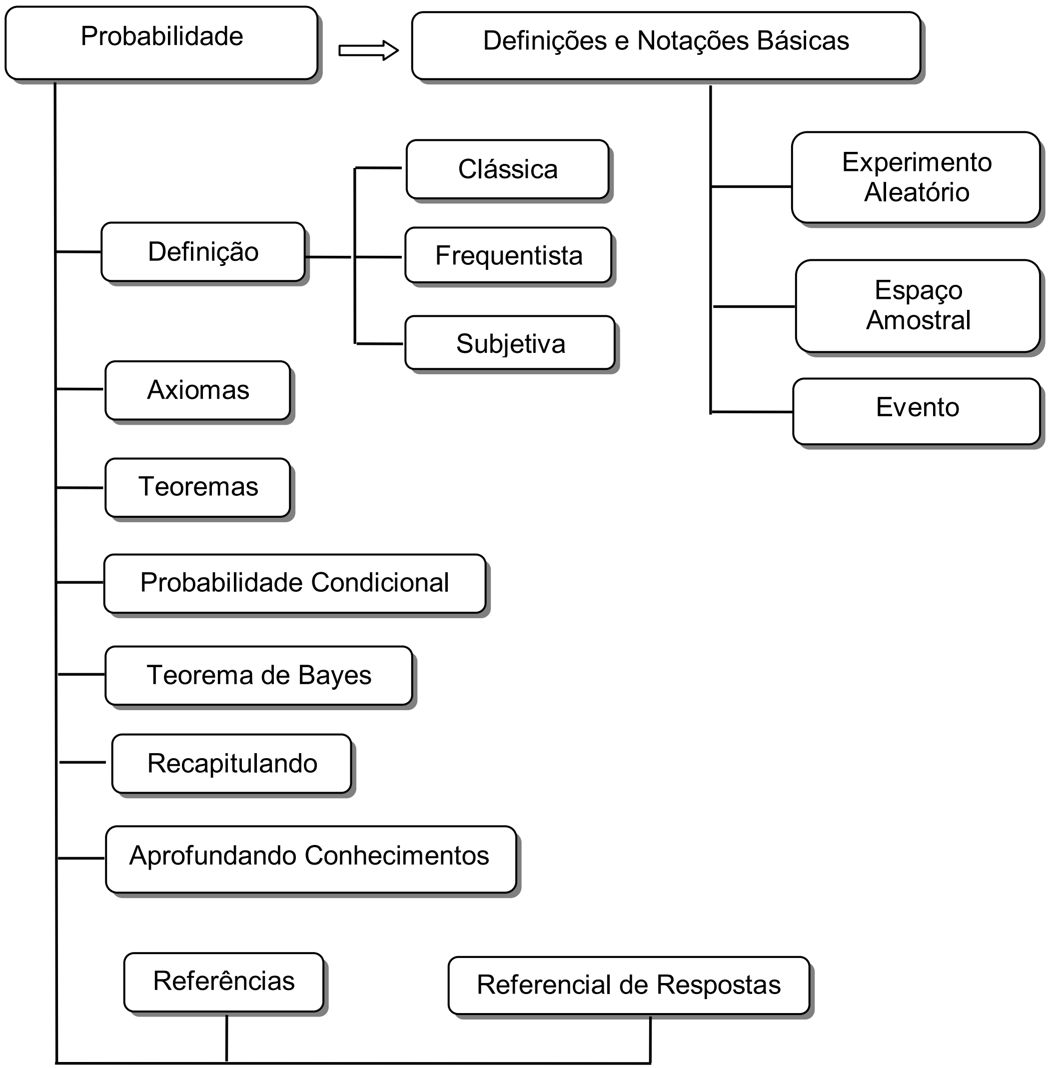


Figura 1 Esquema do capítulo

Probabilidade no dia a dia - Importância

Hoje em dia, os meios de comunicação de massa ou mídias, entre eles os jornais, as revistas, o rádio, a televisão e, mais recentemente a Internet, popularizaram os conceitos e noções da **teoria das probabilidades**. Este fato contribuiu para a interação estimulante e flexível entre a teoria e o dia a dia das pessoas, desmistificando a associação inicial de probabilidade com os "jogos de azar".

Historicamente, o propósito dos estudiosos da teoria das probabilidades limitava-se aos estudos dos jogos de azar, cujo interesse estava voltado em planejar estratégias de apostas. A limitação no estudo da teoria das probabilidades retardou por muito tempo o seu desenvolvimento como disciplina no campo da Matemática. Até que Pierre-Simon de Laplace publica, em 1812, o livro *Theorie Analytique des Probabilités*, no qual aborda a definição clássica de probabilidade. A partir daí o progresso desta teoria não parou, novos estudos foram realizados ao longo do tempo, proporcionando aos estudiosos a aplicação da probabilidade na solução de diversos problemas presentes no cotidiano das pessoas.

Hoje, podemos encontrar diversos exemplos que ilustram a utilização e a aplicação das probabilidades. Por exemplo, a previsão de produção de milho para o próximo ano, a constatação de falha mecânica em um sistema de prevenção contra vazamento em uma usina nuclear, o preparo de um orçamento – municipal, hospitalar, etc., a avaliação do impacto de uma redução no número de funcionários de determinado setor de uma empresa, o cálculo dos custos da produção – cafeeira, de gado de corte, etc., a avaliação de associação entre implantes mamários e doença de tecido conjuntivo.

Perceba, portanto, que a probabilidade está muito mais presente na sua vida do que você, até então, poderia imaginar!

Perguntas Iniciais

O que é probabilidade para você?

Você se recorda de algum fato, momento ou informações de seu cotidiano que transmite "idéias" de probabilidade?

Pense nisso!!!!!

Probabilidade versus Estatística

Embora o cálculo das probabilidades pertença ao campo da Matemática, sua inclusão aqui se justifica pelo fato da maioria dos **fenômenos** de que trata a Estatística ser de natureza probabilística ou aleatórios. Do latim *alea* = sorte.

Procuramos resumir aqui os conhecimentos que julgamos necessários para termos um ponto de apoio em nossos primeiros passos a caminho da Estatística Inferencial.

Definições e Notação Básica

Experimento - É todo processo de realizar observações e obter dados.

Experimentos Determinísticos – são aqueles cujos resultados podem ser determinados antes de sua realização.

EXEMPLO: Quanto tempo levará um carro para percorrer um trajeto de 200 km numa velocidade média de 100 km/h?

Não é necessário executar o experimento para se determinar a resposta: 2 horas.

Experimentos Aleatórios ou Estocásticos – são aqueles que , mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis. Eles vislumbram o acaso.

EXEMPLO: O seu time ganhará a partida de hoje?

Três coisas podem acontecer:

a) Apesar do favoritismo, ele perca;

b) Que, como pensamos, ele ganhe;

c) Que empate.

Assim o resultado final depende do acaso.

Num experimento aleatório temos que:

- todos os resultados possíveis são conhecidos previamente;
- antes de cada realização, não se conhece com certeza o resultado que será obtido, daí a *incerteza*, conceito no qual se baseia a Teoria de Probabilidade;
- por fim, o experimento aleatório pode ser repetido em condições idênticas.

Definições e Notação Básica

O que é um **modelo probabilístico** para você?

Definimos modelo probabilístico como um modelo matemático baseado na teoria das probabilidades utilizado para descrever um **experimento aleatório**

Definições e Notação Básica – cont...

Espaço amostral - geralmente representado por S ou Ω (lê-se Ômega), como o conjunto de todos os **possíveis** e **diferentes** resultados, de natureza quantitativa ou qualitativa, de um experimento aleatório.

Exemplos:

- No lançamento de uma moeda honesta, o espaço amostral do experimento é Ω = {cara,coroa}.

- No lançamento de um dado, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Dois lançamentos sucessivos de uma mesma moeda,

  Ω = {(Ca,Ca), (Ca,Co), (Co,Ca), (Co,Co)}

- Lançamento simultâneos de 2 dados,

  Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), ...,(6,6)}

Cada elemento de Ω que corresponde a um resultado recebe o nome de **ponto amostral**.

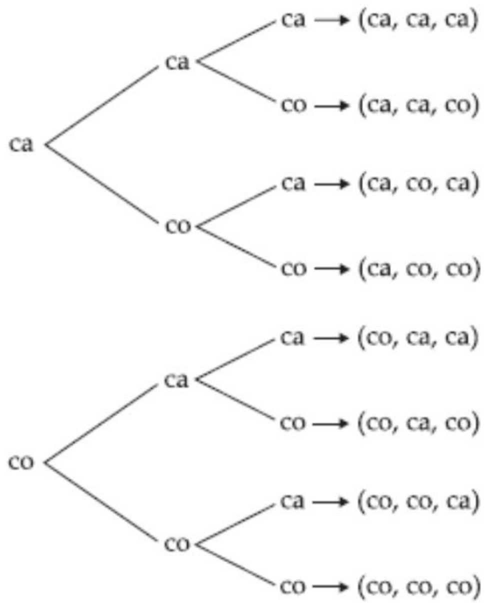
Exemplo de Espaço Amostral

1. Determinar o espaço amostral relativo aos experimentos abaixo:

a. Três lançamentos consecutivos de uma moeda comum.

Solução

Sendo ca = cara e co = coroa, temos:



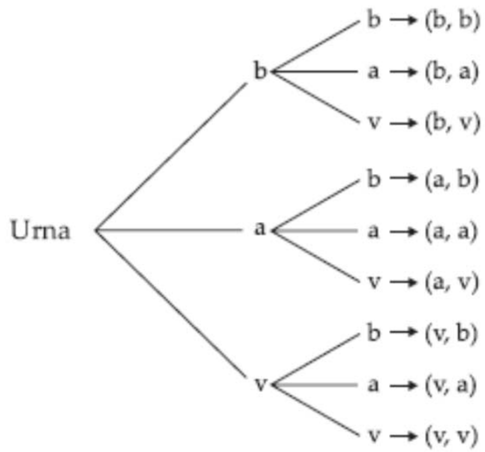
Resposta:

S ou Ω = {(ca, ca, ca), (ca, ca, co), (ca, co, ca), (ca, co, co), (co, ca, ca), (co, ca, co), (co, co, ca), (co, co, co)}

N° de elementos de Ω: $8 = 2^3$

b. Duas retiradas consecutivas e sem reposição de bolas de uma urna que contém 3 bolas brancas, 2 bolas azuis e 4 bolas vermelhas.

Solução



Resposta:

Ω= {(b, b), (b, a), (b, v), (a, b), (a, a), (a, v), (v, b), (v, a), (v, v)}

Na primeira retirada: 3 possibilidades

Na segunda retirada: 3 possibilidades

Se houvesse uma terceira retirada: 2 possibilidades (a azul não pode ser mais retirada)

Atividade 01

Defina o espaço amostral para cada um dos experimentos aleatórios a seguir:

a) Um Engenheiro, responsável pelo controle de qualidade no processo de produção, deseja escolher uma lâmpada comum e medir o seu tempo de vida útil.

$\Omega = \{t / t \geq 0\}$, em que t representa o tempo de vida útil. E podemos notar que inclui a possibilidade da lâmpada não acender logo no início do teste.

b) Considere o experimento que consiste no lançamento de dois dados.

Para facilitar visualizarmos o espaço amostral resultante no lançamento de dois dados, sugerimos a construção de uma tabela. Também é importante considerarmos D_1: dado 1 e D_2: dado 2.

Tabela 1 Valores obtidos, nas faces superiores, no lançamento de dois dados honestos.

D_2 \ D_1	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5,3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Portanto, o espaço amostral:

$\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);...;(6;6)\}$

Atividade 01 – cont...

c) Um estagiário responsável pela produção de uma confecção pretende conhecer o número de peças íntimas defeituosas produzidas durante 1 hora.

$\Omega = \{X \,/\, X \geq 0\}$ em que *X* representa o número de peças defeituosas. E podemos concluir que X = 0 inclui a possibilidade de não se produzir nenhuma peça defeituosa em uma hora. Ou X = 1, logo Ω = {0,1,2,...}.

d) Um técnico de segurança do trabalho quer estimar o nível de ruído, em decibéis, emitido por um prédio em construção na vizinhança.

Portanto, o espaço amostral é o conjunto de todos os números reais positivos, e com isto assume valor contínuo.

Definições e Notação Básica – cont...

Evento (representaremos por E maiúsculo) - é qualquer **subconjunto** do **espaço amostral** Ω de um experimento.

Para exemplificar, considere o lançamento de um dado honesto, cujo espaço amostral é Ω = {1,2,3,4,5,6}. Nesta ação, há diversos eventos possíveis, dentre eles: obter a face menor do que 4, ou seja, E = {1,2,3} , ou, ainda, obter a face par, E = {2,4,6}.

Se **E** = **S**, **E** é chamado de *evento certo*

Se **E** $\subset$ **S** e **E** é um conjunto unitário, **E** é chamado *evento elementar*.

Se **E** = $\varnothing$, **E** é chamado *evento impossível*.

No lançamento de um dado, onde **S** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, temos:

A = {2, 4, 6} $\subset$ S; logo, **A** é um evento de **S**

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\subset$ **S**; logo, **B** é um evento certo de **S** (**B** = **S**)

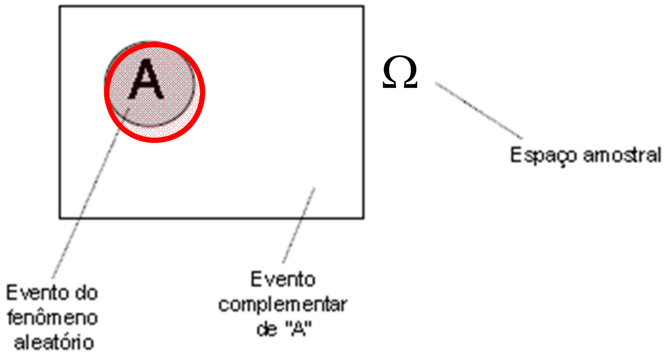
C = {4} $\subset$ **S**; logo, **C** é um evento elementar de **S**

D = $\varnothing$ $\subset$ **S**; logo, **D** é um evento impossível de **S**.

Definições e Notação Básica – cont...

OPERAÇÕES COM EVENTOS COMPLEMENTARES

O *complemento* de um evento **A** é o subconjunto formado pelos elementos do espaço amostral não incluídos no evento A.

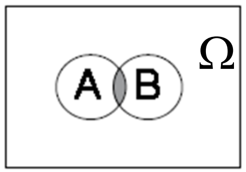


Por exemplo, o complemento do evento **A** = {CaCo, CoCa} é o evento **Ã** = {CaCa, CoCo}.

Note que: n(A) + n(Ã) = n(E)

Dois ou mais eventos de um mesmo espaço amostral podem ser agrupados em operações de união e interseção, assim definidas:

A operação *união* dos eventos **A** e **B** gera um novo evento formado pelos elementos comuns e não comuns dos dois conjuntos, **A** e **B**.



A operação *interseção* dos eventos **A** e **B** gera um novo evento formados apenas pelos elementos comuns aos dois conjuntos, **A** e **B**.

Vejamos algumas conseqüências das operações com eventos:

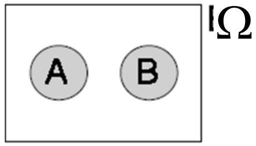
A *união* de um evento **A** e seu complemento **Ã** é o próprio espaço amostral S; isto é, **A** $\cup$ **Ã** **= S.**

A *interseção* de um evento A e seu complemento é o conjunto vazio, isto é, **A** $\cap$ **Ã** **=** $\emptyset$**.**

Definições e Notação Básica

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES E COLETIVAMENTE EXAUSTIVOS

Os resultados possíveis do lançamento de uma moeda são apenas dois, os eventos elementares *Ca* e *Co*. Pela própria característica do experimento, se o resultado de um lançamento for cara este resultado não poderá ser também e ao mesmo tempo coroa, pois são eventos *mutuamente excludentes*. A união de eventos elementares forma o espaço amostral, pois são eventos *coletivamente exaustivos*. Portanto, verifica-se que os eventos **A** e **B** pertencentes ao mesmo espaço amostral S:



São *mutuamente excludentes* se sua interseção for vazia: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, pois os dois eventos não têm nenhum elemento em comum. Ex: Os eventos Ca e Co resultantes do lançamento de uma moeda.

São *coletivamente exaustivos* se a união dos eventos formarem o espaço amostral: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{S}$, onde cada evento pode ter elementos repetidos no outro evento. Ex: O espaço amostral da nota final de Estatística está formado por quatro eventos elementares: conceito A, conceito B, conceito C e conceito D. Os quatro conceitos são eventos mutuamente excludentes e juntamente são eventos coletivamente exaustivos, pois quando agrupados formam o espaço amostral de todos os conceitos.

Exercícios

1. Considerando o experimento: lançar uma moeda comum e anotar o resultado, lançando em seguida um dado comum e anotando o resultado como um par (moeda, dado), descrever:

a. o espaço amostral S;

b. o evento E_1 = sair cara na moeda;

c. o evento E_2 = sair par no dado;

d. o evento E_3 = sair cara na moeda e par no dado;

e. o evento E_4 = sair cara na moeda ou par no dado.

2. Fazendo duas retiradas consecutivas (com reposição) de bolas de uma urna que contém duas bolas brancas, três bolas verdes e quatro bolas amarelas, qual será o espaço amostral?

3. Retirando, de uma só vez, duas bolas de uma urna que contém duas bolas brancas, três bolas verdes e quatro bolas amarelas, qual será o espaço amostral?

4. Considerando o experimento: fazer dois lançamentos consecutivos de um dado comum e honesto e anotar a face que ficará voltada para cima em cada lançamento, determinar:

a. o espaço amostral S;

b. o evento A = a soma dos resultados é 5;

c. o evento B = os resultados são iguais;

d. o evento C = o produto dos resultados é ímpar.

5. Considerando o experimento: fazer um lançamento de dois dados comuns, honestos e indistinguíveis e anotar as faces que ficarão voltadas para cima, determinar:

a. o espaço amostral S;

b. o evento A = a soma dos resultados é 5;

c. o evento B = os resultados são iguais;

d. o evento C = o produto dos resultados é ímpar.

Definições e Notação Básica – cont...

Probabilidade - É a possibilidade ou chance de ocorrência, ou medida de ocorrência, de um evento definido sobre um espaço amostral, que por sua vez está relacionado a algum experimento aleatório ou não determinístico. No cálculo da probabilidade, o resultado será um número real compreendido entre 0 e 1, ou, o equivalente a dizer, entre 0 e 100%.

Definição Clássica de Probabilidade

Probabilidade - Representa a proporção do número de resultados favoráveis ao evento em relação ao número total de resultados possíveis do fenômeno, quando todos estes são considerados **equiprováveis**.

O termo **equiprovável** (ou igualmente provável) significa não preferir alguns resultados em detrimento de outros. Isto é fácil observar quando ocorre algum tipo de *simetria* no fenômeno estudado.

Exemplo

Considere o fenômeno *"rolar um dado equilibrado".* Observando o número que ocorre na face voltada para cima (ou superior), qual a probabilidade de ocorrer o evento número par?

Denominando a probabilidade de "ocorrer número par" por:

P (ocorrer número par) = p = 3/6.

Portanto, obtivemos três resultados favoráveis, sobre os seis resultados possíveis do espaço amostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. A probabilidade de ocorrer o evento número par é de 0,5 ou 50%.

OBSERVAÇÃO

Historicamente, é na idade média, com Galileu, que se registrou pela primeira vez a citação do termo **equiprovável**. Saiba que, mesmo em épocas remotas, a definição clássica foi considerada muito restrita, pois não respondia a questão: o que é probabilidade? Se observarmos o exemplo estudado, a definição clássica só realiza o cálculo de probabilidade de alguns eventos mais simples, utilizando, para isto, o método de contagem.

Exemplos

Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, construímos todos os números que podem ser representados usando dois deles (sem repetir). Escolhendo ao acaso (aleatoriamente) um dos números formados, qual a probabilidade de o número sorteado ser:

a. par

Temos 7 possibilidades de escolha do primeiro algarismo dos números e seis escolhas do segundo algarismo (os números não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos 7 . 6 = 42 caso possíveis.
Para o número ser par deverá terminar (unidade) em 2, 4 ou 6. Devemos ter 3 possibilidades (2, 4, 6) associadas a 6 possibilidades (não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos 3 . 6 = 18 casos favoráveis. Logo a probabilidade será:

$$P(par) = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

b. múltiplo de 5?

Casos possíveis = 42
Casos favoráveis = 1 . 6 = 6

$$P(múltiplo\ \ de\, 5) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

Definição Frequentista de Probabilidade

Probabilidade de um evento E é expressa por:

$$P(E) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{número\ de\ ocorrências\ de\ E\ em\ n\ repetições\ independentes}{número\ n\ de\ repetições\ do\ experimento}\right)$$

Exemplo 1

Vamos supor um experimento em que jogamos um percevejo, usado para afixar painéis de aviso, sobre uma superfície lisa. Qual a probabilidade dele cair apontado para cima?

Primeiro é necessário entender que, neste caso, não podemos recorrer para propriedades de simetria, pois no caso do percevejo elas não existem.

Portanto, pense: **como calcular a probabilidade dele cair apontado para cima?**

A idéia é aproximar a probabilidade pela **estimativa** da probabilidade de ocorrência do evento, ou seja, jogar o percevejo vezes, mantendo-se as mesmas condições (mesmo percevejo, mesmo indivíduo – "jogador", mesma superfície, etc.)

Para resolver este problema, devemos utilizar a expressão a seguir:

$$P(cair\ apontando\ para\ cima) = p = \frac{número\ de\ vezes\ que\ cair\ apontando\ para\ cima}{número\ total\ de\ observações\ (n)}$$

OBSERVAÇÃO

Neste exemplo, poderíamos também considerar uma moeda **não equilibrada** (isto é cara e coroa não são igualmente prováveis), ou um dado **não honesto** (isto é, os resultados 1, 2, 3, 4, 5 e 6 não são igualmente prováveis).

Fique atento para distinguir que a escolha da definição a ser aplicada depende muito da natureza do fenômeno. É possível observar que a **definição frequentista** se baseia na estabilidade da frequência relativa. No exemplo visto, o percevejo deverá ser lançado diversas vezes e a freqüência com que sua ponta cai para cima atingirá, depois de várias repetições, um comportamento que tende a estabilidade. Se lançado vezes, o percevejo cair com a ponta para cima em aproximadamente 70% das tentativas, este é o **comportamento esperado** do evento. Portanto, sua probabilidade **tende** a ser de 0,7 ou 70%.

Exemplo 2 de Definição Frequentista

Qual a chance de se retirar, de um baralho comum, uma carta de ouros?

E: retirar uma carta de ouros de um baralho comum
n: número de resultados favoráveis à ocorrência do evento
T: número total de resultados igualmente possíveis do espaço amostral

Portanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(carta\ de\ ouro) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ ou\ 25\%$$

Se existem 13 cartas de ouros em 52 cartas totais, temos 25% de chance de retirar uma carta de ouros de um baralho comum.

Num baralho padrão temos 52 cartas, sendo 13 de cada naipe:

As cartas são: A(ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J(valete), Q(dama) e K(rei)

13 copas:	♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 ouros:	♦ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 paus:	♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 espadas:	♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Exemplos

Definição Subjetiva de Probabilidade

É a atribuição de probabilidades baseadas em experiências passadas, opiniões, enfim, no poder de análise pessoal de uma situação específica. Por exemplo, suponhamos que um químico manipule um novo perfume para mulheres e atribua uma probabilidade de aceitação deste perfume junto às mulheres bastante diferente daquela atribuída pelo dono do estabelecimento.

A **probabilidade subjetiva** é especialmente útil na tomada de decisões, quando estas não puderem ser determinadas empiricamente.

EXEMPLOS

- Qual a probabilidade de você fechar sua nota na próxima avaliação presencial?
- Qual a probabilidade de chover no final de semana?
- Qual a probabilidade do enfermo se recuperar completamente?

OBSERVAÇÃO

Para que a teoria construída sobre esta ou outras questões subjetivas (pessoais) tenha consistência (coerência) algumas regras gerais e de comportamentos racionais são estabelecidas. Estas regras são baseadas em alguns **axiomas**, ou seja, teorias que vamos apresentar ainda neste capítulo. Mas, antes de conhecer estes axiomas, vamos conhecer algumas terminologias e idéias básicas que os compõem.

Axiomas da Probabilidade

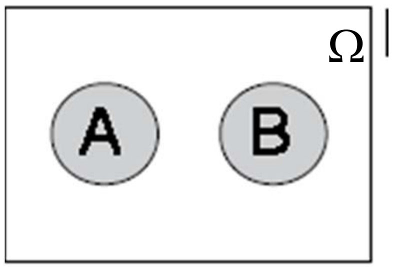
Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axioma 2: $P(\Omega) = 1$

Axioma 3: Se E_1 e E_2 são eventos **mutuamente exclusivos**, então

$$P(E_1 \text{ ou } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

É sabido, portanto, que dois eventos e são **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** quando <u>não</u> têm elementos em comum, isto é, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.



Dois eventos são mutuamente exclusivos quando não têm intersecção.

$A \cap B = \varnothing$, $n(A \cap B) = 0 \rightarrow P(A \cap B) = 0$

Teoremas da Probabilidade

I. O **evento impossível** possui probabilidade zero, isto é, $P(\emptyset) = 0$.

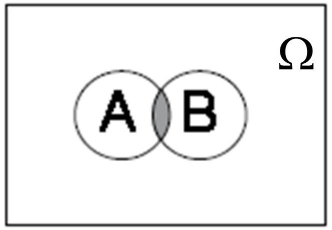
II. Se E^c representa o **evento complementar** de E, então $P(E^c) = 1 - P(E)$.

III. Para quaisquer eventos, supor A e B, temos que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

IV. Se $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

V. Se associados a um espaço amostral estiver dois eventos quaisquer, , temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



A área hachurada da figura ao lado é A∩B, mas observe que A∩B faz parte de A e também de B.
$n(AUB) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Daí, dividindo toda a igualdade por n(E), vem:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Caso os eventos A e B sejam **mutuamente exclusivos**, isto é, $A \cap B = \emptyset$, temos do **teorema V:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo 1

Lancei um dado.
Seja "A" o evento de se obter 1 ou 3, e "B" o evento de se obter 3 ou 4, calcule $P(A \cup B)$

Solução

$P(A) = 2/6$ e $P(B) = 2/6$ e $P(A \cap B) = 1/6$

Os eventos "A" e "B" têm o elemento "3" em comum, ou seja, ele pertence aos dois ao mesmo tempo, assim os dois eventos não são mutuamente exclusivos.

Logo: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = (2/6) + (2/6) - (1/6) = 3/6$

E se os eventos fossem $A = \{1,3\}$ e $B = \{4,5\}$?

Exemplo 2

Extrai-se uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um rei ou uma carta de ouro?

Solução

Consideremos que "A" seja representado pela possibilidade de sair um rei e "B" a possibilidade de sair uma carta de ouro. Observe que "A" e "B" têm um único elemento em comum: o rei de ouros.

O baralho tem 52 cartas e 4 naipes: paus, espadas, copas e ouros. Sabe-se que cada naipe tem 13 cartas, que vão do "A" (ás) ao "K" (rei), sem considerar os coringas.

Então: P(A) = 4/52   P(B) = 13/52   P(A∩B) = 1/52

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\text{número de reis do baralho}}{\text{número total de cartas do baralho}} = \frac{4}{52}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\text{número de cartas de ouro}}{\text{número total de cartas do baralho}} = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(E)} = \frac{\text{número de cartas de ouro e rei ao mesmo tempo}}{\text{número total de cartas do baralho}} = \frac{1}{52}$$

Num baralho padrão temos 52 cartas, sendo 13 de cada naipe:

As cartas são: A(ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J(valete), Q(dama) e K(rei)

13 copas: ♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 ouros: ♦ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 paus: ♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 espadas: ♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Logo: P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = (4/52) + (13/52) – (1/52) = 16/52

Exemplo 3

Um baralho tem 12 cartas, das quais 4 são ases. Retiram-se 3 cartas ao acaso. Qual a probabilidade de haver pelo menos um ás entre as cartas retiradas?

Solução

12 cartas, das quais 4 são ases.

Espaço amostral = U

n(U) = 12 . 11 . 10 = 1.320

Evento A = sair pelo menos um ás

Evento A_{com} = não sair ás.

$$n(A_{com}) = \underset{\text{não Ás}}{8} \;.\; \underset{\text{não Ás}}{7} \;.\; \underset{\text{não Ás}}{6} = 336 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{336}{1.320} = \frac{14}{55} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$$

Atividade 02

Sabe-se que a Indústria FAJU-CAMADE, fabricante de sacos em tecido de polipropileno (*Big Bags*), apresenta um processo de inspeção para controle de qualidade em três etapas, I, II e III. A probabilidade de um produto passar em qualquer dessas etapas de inspeção sem ser detectado é de aproximadamente 82%. Com base nestas informações, encontre a probabilidade de um produto passar pelas três etapas de inspeção sem ser detectado. Apresente uma conclusão para o resultado obtido.

Solução

A situação apresentada na atividade 2 sugere a aplicação da definição de **eventos independentes**, entre as três etapas de inspeção, em que podemos escrever:

$$P(I \cap II \cap III) = P(I)\ P(II)\ P(III)$$

$$P(I \cap II \cap III) = 0{,}82^3 \cong 55{,}14\%$$

Probabilidade Condicional

Considerando dois eventos **A** e **B** associados a um espaço amostral Ω. A probabilidade de **A** ocorrer dado que o evento **B** ocorreu é representada pela expressão:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, em\ que\ P(B) > 0$$

Atenção!

Quando calculamos a probabilidade P(A|B), a idéia intuitiva que podemos ter é que o evento **B** seja um novo espaço amostral reduzido dentro do qual queremos calcular a probabilidade do evento **A**.

Teorema do Produto

Do conceito de probabilidade condicional $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, em\ que\ P(B) > 0$ obtém-se o teorema do produto, também conhecido como **teorema da multiplicação**.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Generalizando para n eventos, temos:

$$P(A \cap B \cap C \ ...N)) = P(A)P(B|A)\ P(C|A \cap B)...P(N|A \cap B \cap C\ ....)$$

Independência Estatística

Dois eventos A e B são **independentes**, se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é:

$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B) > 0$$

O que equivale à expressão:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(A|B) = P(A) \,.\, P(B)}$$

A probabilidade de que eles se realizem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de realização dos dois eventos

Atenção!
Não é difícil verificar que se A é independente de B , então B é independente de A. Além disso, o uso da expressão acima nos permitiu verificar que o evento vazio ($\emptyset$) é independente de qualquer evento.

Exemplo – Lançando dois dados honestos simultaneamente, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo dado?

A probabilidade de se obter 1 no primeiro dado é (1/6) e de se obter 5 no segundo também é (1/6). Logo, a probabilidade de obtermos , simultaneamente, 1 no primeiro e 5 no segundo é:

$(1/6) \times (1/6) = 1/36$

Teorema da Probabilidade Total

Sejam E_1, E_2, E_3, ..., E_n eventos que constituem uma partição do espaço amostral Ω, isto é:

- $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = \Omega$
- $P(E_i) > 0$, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
- $E_i \cap E_j = \varnothing$ para $i \neq j$

Assim, se representa um evento, temos o seguinte teorema, conhecido como **teorema da Probabilidade Total**:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(B|E_i)}$$

Exemplo 1

Uma urna contém 10 bolas pretas e 10 bolas brancas. Extraem-se duas bolas da urna. Qual a probabilidade de ambas serem brancas se:

- houver reposição da 1° bola extraída.
- não houver reposição da 1° bola extraída.

Solução

A urna contém um total de 20 bolas, 10 brancas e 10 pretas.

Nós queremos que as duas bolas extraídas sejam brancas: a 1° branca e a 2° branca. Seja A o evento "a primeira bola extraída é branca" e B o evento "a segunda bola extraída é branca".

Desejamos conhecer $P(A \cap B)$.

No caso a, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$, pois os eventos são independentes.

Veja que $P(A) = 10/20$, ou seja, a probabilidade da primeira bola extraída ser branca é a relação entre o número de bolas brancas e o total de bolas da urna.

$P(B)$ também é $10/20$, pois a bola extraída foi devolvida à urna, e o total de bolas continua igual (o total de bolas corresponde ao espaço amostral, que não foi alterado).

Assim, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (10/20) \cdot (10/20) = 1/4$

Neste caso, a bola extraída da primeira vez não foi devolvida à urna; como eram 20 bolas, ficamos com 19 bolas no total. Como a primeira bola extraída foi branca, ficamos com 9 brancas e 10 pretas na segunda extração. Assim, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = (10/20) \cdot (9/19) = 9/38$

Exemplo 2

A probabilidade de uma mulher estar viva daqui a 30 anos é de 2/3 e de seu marido 3/5. Quais as probabilidades de daqui a 30 anos:

- somente a mulher estar viva;
- somente o homem estar vivo;
- ambos estarem vivos;
- selo menos um estar vivo.

Solução

Seja P(M) a probabilidade da mulher estar viva daqui a 30 anos. P($\tilde{M}$) será a probabilidade do evento complementar, que é estar morta.

Portanto: P(M) = 2/3 e P($\tilde{M}$) = 1/3

Da mesma forma para o homem: P(H) = 3/5 e P($\tilde{H}$) = 2/5

Com estes dados, vamos à solução: P (M∩$\tilde{H}$), i.é., a mulher estar viva e o homem morto, pois queremosa probabilidade de somente a mulher estar viva.

P (M∩$\tilde{H}$) = P(M) . P ($\tilde{H}$/ M) = P(M) . P($\tilde{H}$)

P ($\tilde{H}$/ M) representa a probabilidade do homem estar morto quando a mulher estiver viva. Como uma coisa não depende da outra, os eventos são independentes. Portanto:

P ($\tilde{H}$/ M) = P($\tilde{H}$). Assim, P(M∩$\tilde{H}$) = P (M) . P ($\tilde{H}$) = (2/3 . 2/5)= 4/15

Neste caso, queremos homem vivo e mulher morta, portanto:

P (H∩$\tilde{M}$) = P (H) . P ($\tilde{M}$) = 3/5 . 1/5 = 3/15

Neste caso, queremos os dois vivos, um **e** outro:

P (H∩M) = P (H) . P (M) = 3/5. 2/3 = 6/15

Neste caso, queremos um **ou** outro vivo:(HUM)

P (H U M) = P (H) + P (M) – P (H∩M) = (3/5 + 2/3 – 6/15) = 13/15

Observe que, daqui a 30 anos, podemos ter: Ambos vivos:

- P(H∩M) = 6/15
- Homem vivo e mulher não: 3/15
- Mulher viva e homem não: 4/15

Quando dizemos um ou outro, estamos dizendo as três citadas, cuja soma é 13/15, como você verificou na união.

A única alternativa (possibilidade) ainda não cogitada foi a dos dois estarem mortos.

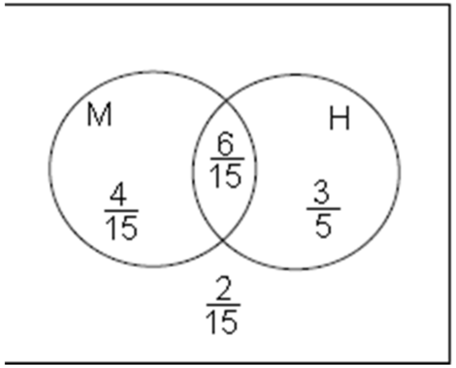
Exemplo 2 – cont...

Então, calculemos:

$P(\tilde{H} \cap \tilde{M}) = P(\tilde{H}) \,.\, P(\tilde{M}) = 2/5 \,.\, 1/3 = 2/15$

Observe que 13/15 + 2/15 = 15/15 = 1, i.é., a soma das probabilidades de todas as possibilidades é sempre igual a 1.

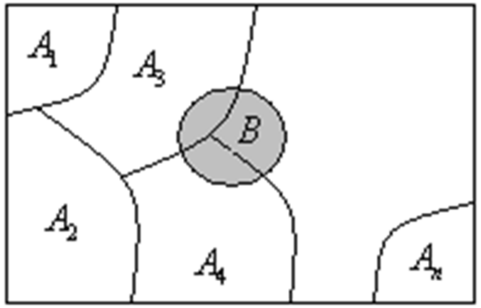
Dizemos que houve a exaustão do espaço amostral quando todas as possibilidades foram consideradas, como o ocorrido nesse caso



- Só a mulher viva: 4 /15
- Só o homem vivo: 3/15
- Ambos vivos: 6/15 (Intersecção)
- Pelo menos um vivo: 13/15 (União)
- Os dois mortos: 2/15

Teorema de Bayes

Considere $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos *mutuamente excludentes* cuja união representa o espaço amostral Ω, isto é, um dos eventos *necessariamente* deve ocorrer. Observe o diagrama seguinte:



Assim, se B é um evento qualquer, temos o seguinte teorema, conhecido como **teorema de Bayes**, representado pela expressão:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Saiba que o teorema apresentado permite determinar as probabilidades dos vários eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ que podem ser a *causa* da ocorrência do evento B. Devido a isto, o teorema de *Bayes* é também conhecido como *teorema da probabilidade das causas*.

Atividade 03

Ambientalistas de uma ONG (Organização Não Governamental), após um levantamento de dados, constataram, em uma cidade, a existência de três indústrias: I, II, III. Cada indústria participa com 40%, 35%, 25%, respectivamente, da produção industrial da cidade. A proporção de gases poluentes lançados na atmosfera é de 2% pela indústria I, 1% pela indústria II e 3% pela indústria III. Uma análise da emissão de gases poluentes ou de partículas sólidas na atmosfera é realizada ao acaso nesta cidade, o que permitiu aos ambientalistas verificar a existência de polução atmosférica. Qual a probabilidade dos gases considerados poluentes terem sidos lançados pela indústria II?

Solução

Primeiro denominamos cada um dos eventos, depois com muita atenção definimos a probabilidade condicionada ao evento de interesse.

II: representa o evento "lançado pela indústria II"

G: representa o evento "gases poluentes lançados na atmosfera"

Pergunta: Qual probabilidade dos gases considerados poluentes terem sidos lançados pela indústria II? Logo, queremos a probabilidade condicional de:

P(II|G) = ?

$$P(II|G) = \frac{P(II \cap G)}{P(G)} = \frac{P(II)P(G|II)}{P(G)}$$

Atenção! Não se esqueça que os gases poluentes podem provir de qualquer uma das três indústrias (e só de uma). Portanto, confira a seguir como realizar os cálculos de P(G), que representa a probabilidade dos gases considerados poluentes lançados na atmosfera.

Como calcular P(G)?
P(G) = P(I)P(G|I)+P(II)P(G|II) + P(III)P(G|III) = P(0,40)P(0,02)+P(0,35)P(0,01)+ P(0,25)P(0,03) = 0,019

$$P(II|G) = \frac{P(II)P(G|II)}{P(G)} = \frac{(0{,}35)(0{,}01)}{(0{,}40)(0{,}02) + (0{,}35)(0{,}01) + (0{,}25)(0{,}03)} = \frac{0{,}0035}{0{,}019} = 0{,}184 = 18{,}4\%$$

Portanto, conclui-se que a probabilidade dos gases, considerados poluentes, terem sido lançados pela indústria II é de aproximadamente 18,4%.

Resumo

Neste capítulo, introduzimos os conceitos básicos atribuídos às probabilidades, e determinamos situações práticas às quais ela se aplica. Abordamos algumas definições e regras importantes e necessárias ao entendimento e aplicação do cálculo de probabilidades. Dentre elas, a **Definição Clássica**, a **Definição Frequentista** e a **Definição Subjetiva**, com a inserção de exemplos práticos e desenvolvidos passo a passo.

Estudamos alguns axiomas e teoremas de probabilidade. Indicamos a leitura do texto Probabilidade (MORETTIN, 2009), dentro do qual você conheceu os Teoremas de Probabilidade, a probabilidade condicional e a aplicação do teorema de Bayes para o cálculo de probabilidades *a posteriori*, utilizando as probabilidades *a priori*.