Avaliação de anuidade diferida & Taxas de juros

Uma aula preparada por
LUIZ A. BERTOLO
IMES-FAFICA

Avaliando uma anuidade vencida

Avaliando uma anuidade vencida

- Uma anuidade vencida é um modelo de série de fluxos de caixa.
- O que distingue uma anuidade vencida de uma anuidade é o timing do início da série.
- Numa anuidade ordinária, o primeiro fluxo de caixa ocorre no final do período.
- Numa anuidade vncida, o primeiro fluxo de caixa ocorre imediatamente.

Exemplo: Valor futuro de uma anuidade vencida

Suponhamos que você deposite \$1.000 a cada ano por três anos numa conta que pague 5% de juros, composto anualmente. Se os depósitos são feitos no início do ano, qual é o saldo na conta no final de três anos?

```
    0          1           2           3
--|----------|-----------|-----------|--
$1.000   $1.000    $1.000    FV3=?
```

Exemplo, continuação

0	1	2	3
$1.000	$1.000	$1.000	FV_3=?

```
--|----------|-----------|-----------|--
```

$1.050,00

1.102,50

<u>1.157,63</u>

FV_3 = $3.310,13

Valor futuro de um fator anuidade

$$\begin{pmatrix} \text{fator anuidade FV} \\ \text{anuidade ordinária} \end{pmatrix}(1+i) = \begin{pmatrix} \text{fator de anuidade FV} \\ \text{anuidade vencida} \end{pmatrix}$$

(3,1525) (1,05) = 3.3101

FV = \$1.000 (3,3101) = \$3.310,10

Exemplo, continuação

Usando uma calculadora

Nota: Colocando a calculadora no modo BEGIN

1000	PMT
3	N
5	i
FV	

Valor Presente de um fator anuidade, continuação

$$\left(\begin{array}{c}\text{fator anuidade PV}\\ \text{anuidade ordinária}\end{array}\right)(1+i) = \left(\begin{array}{c}\text{fator anuidade PV}\\ \text{anuidade vencida}\end{array}\right)$$

Exemplo: Valor Presente de uma anuidade vencida

Suponha que você ganhe $7 milhões na loteria da Florida. Os premiados da loteria são pagos em vinte prestações anuais iguais, com a primeira prestação paga imediatamente. Se você pudesse investir os fundos para render 5% ao ano, qual é a <u>menor</u> soma total que você estaria ganhando hoje em troca das suas vinte prestações.

Exemplo continuação

Dado:	CF_t	=	\$350,000
	N	=	20
	i	=	5%

$$PV = \$350{,}000\ (12.4622)\ (1.05)$$
$$= \$350{,}000\ (13.0853)$$
$$= \$4{,}579{,}862$$

Exemplo continuação

- Os vinte pagamentos valem $4.579.862 para você hoje. Portanto, a quantia mínima que você aceitaria é $4.579.862.
- Se a taxa de juros for maior você aceitaria menos (Exemplo: se 10%, aceitar $3.277.722).

Avaliando uma anuidade diferida

Anuidade diferida

- A anuidade diferida é uma anuidade para a qual o primeiro fluxo de caixa ocorre além do término do primeiro período.
- A anuidade diferida pode ser resolvida em dois passos:
  - Primeiro calcule o valor presente de uma anuidade ordinária, e
  - Daí desconte este valor presente ao presente (instante 0).

Anuidade diferida - exemplo

Suponha que você queira depositar uma quantia hoje numa conta que pague 5% de juros, composto anualmente, de modo que você possa retirar $20.000 por ano durante vinte anos, com a primeira retirada daqui a trinta anos. Qual é a quantia deste depósito?

Anuidade diferida - exemplo, cont.

A representação da Linha do Tempo do problema

```
  0    1    2      28  29  30  31  32 … 49
--|----|----|-… --|----|----|----|----|- … -|---
  ⇧                        ⇧    ⇧    ⇧        ⇧
depósito                   20 retiradas
```

Anuidade diferida - exemplo, cont.

Passo 1: Determinar o saldo na conta ao término de 29 anos.

```
 0     1    2          28     29   30 31 32   … 49
--|----|----|-…    --|----|----|----|----|- …  -|-
                               ⇧
```

Dado: CF = \$20.000

N = 20

i = 5%

PV_{29} = \$20.000 (12,4622) = \$249.244

Anuidade diferida - exemplo, cont.

Passo 2: Descontar o saldo para o presente

```
   0     1    2       28     29   30   31   32   … 49
--|----|----|-… --|----|----|----|----|- …  -|---
  ⇧                      ⇧
depósito              $249.244
```

Dado: FV_{29} = PV_{29} = \$249.244

i = 5%

n = 29

$PV_0 = \$249.244 / (1 + 0{,}05)^{29} = \$60.552$

Um outro problema de anuidade diferida

Suponhamos que você deposite 1.000 numa conta ao término de cada ano, começando no próximo ano, por trinta anos (trinta depósitos). Sua meta é viver da poupança por vinte anos, começando um ano após o seu último depósito.

Se você puder receber 6% sobre seus depósitos e suas retiradas na aposentadoria forem quantias anuais e iguais, qual é a quantia que você pode retirar de uma vez na sua aposentadoria?

Um outro problema de anuidade diferida, continuação

A representação na Linha do Tempo:

```
 0    1   2    3    4  … 30  31  32  …  50
--|----|----|----|----|--…--|----|----|-- … --|--
      D   D   D    D       D   R  R        R
```

Idéia básica:

Faça trinta depósitos, seguido de vinte retiradas.

Um outro problema de anuidade diferida, continuação

Passo 1: Valor futuro dos depósitos

Dado CF = $1.000
N = 30
i = 6%

FV_{30} = $1.000 (79,05819) = $79.058,19

```
  0    1    2   3    4  … 30  31  32  …   50
--|----|----|----|----|--… --|----|----|-- … --|--
       D    D    D    D      D    R   R       R
                             ⇧
                        $79.058.129
```

Another anuidade diferida problema, continuação

Passo 2: Encontrar a quantia (CF) da anuidade

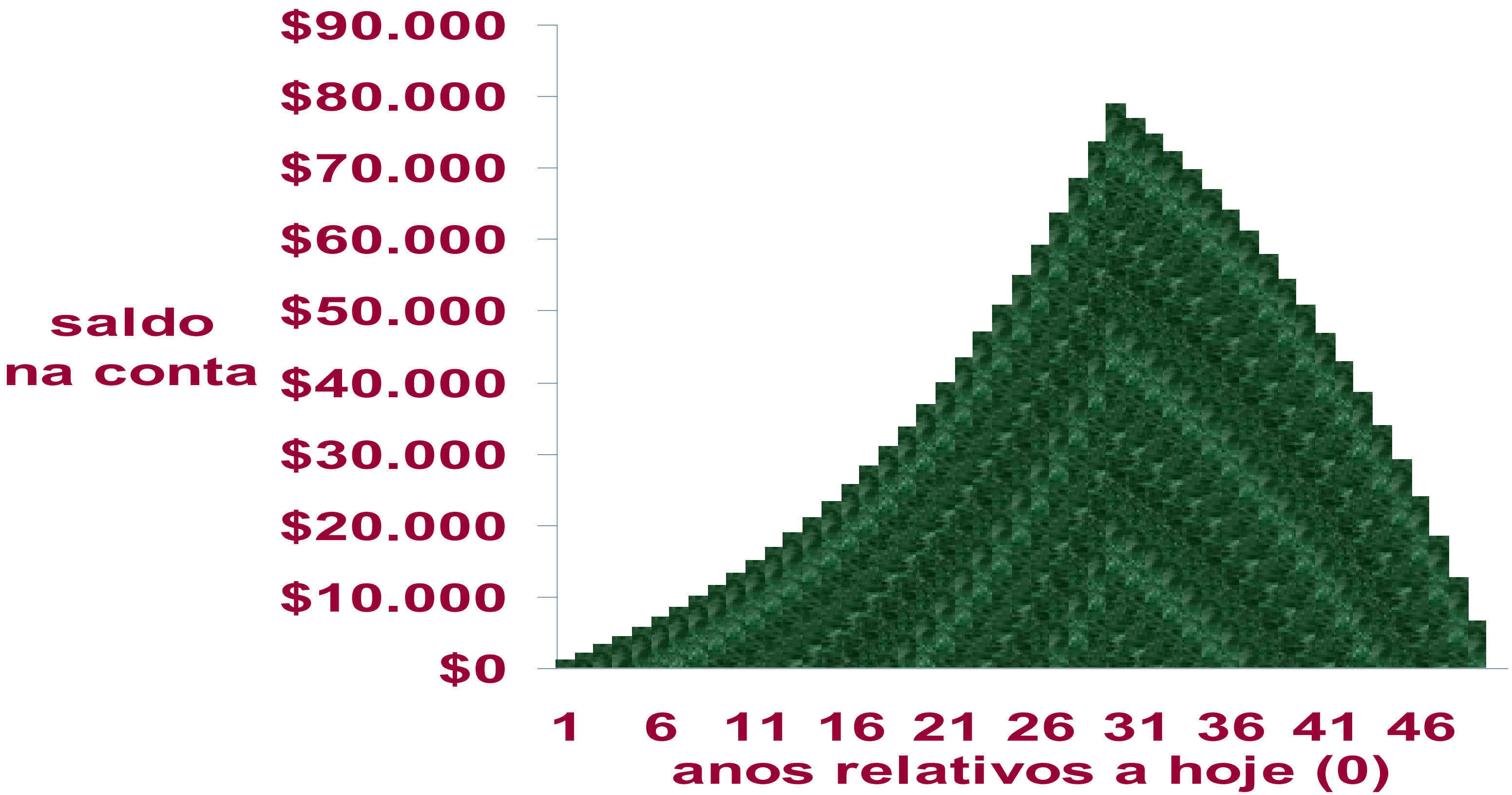
Dado:	PV_{30}	=	$79,058.19
	N	=	20
	i	=	6%

PV_{30} = CF (fator anuidade PV)

$79.058,19 = CF (11,46992)

CF = $6.892,65

Um outro problema de anuidade diferida, continuação



Calculando as taxas anuais de juros

Taxa anual porcentual (TAP ou APR)

A taxa annual porcentual (TAP ou APR) é uma taxa anualizada:

$$APR = i \times n$$

onde i é a taxa por período de composição e n é o número de períodos de composição num ano.

Vantagens da APR

- Fácil de calcular.
- Ignora a composição, assim ofusca a verdadeira taxa de juros.
- Usada no financiamento ao consumidor (p.ex., empréstimos de carro).

Taxa anual efetiva (TAE ou EAR)

A taxa anual efetiva (TAE ou juro efetivo ou EAR) é uma taxa anual que leva em conta qualquer composição que ocorra durante o ano.

$$EAR = (1 + i)^n - 1$$

EAR e composição contínua

A taxa anual efetiva quando o juro é composto continuamente, é:

$$EAR = e^{APR} - 1$$

Exemplo #1

Calcular a APR e a EAR para créditos que exigem 15% de juros, compostos trimestralmente.

Solução para o exemplo #1

APR = 15% (dado)

EAR = $(1 + (0.15/4)\ )^4 - 1$

= $(1 + 0.0375)^4 - 1$

= $1.15865 - 1$

= 15.865%

Exemplo #2

Suponha que você empreste $20.000 que será pago de volta em 20 prestações trimestrais de $1.223,13 cada. Qual é a taxa anual efetiva de juros deste empréstimo?

Solução do exemplo #2

Dado:

PV = $20,000

N = 20

PMT = $1,223.13

Encontrar i (taxa trimestral), e daí anualize:

i = 2%

EAR = $(1 + 0.02)^4 - 1 = 8.243\%$

Exemplo #3

Suponha que você tomou emprestado $10.000 do U. Borough Company. O empréstimo é pago de volta em 30 prestações mensais de $500 cada uma. Qual é a taxa anual efetiva de juros sobre este empréstimo?

Solução do exemplo #3

Dado: PV = \$10,000

N = 30

PMT = \$500

Usando tabela ou uma calculadora,

$i = 2.8446\%$

Porque i é uma taxa mensal,

$$EAR = (1 + 0.028446)^{12} - 1$$

$$= \mathbf{40.0161\%}$$

Exemplo #4

Suponha que o banco queira pagar, efetivamente, 12% ao ano. Qual a APR deeria este banco adotar se o juro é composto mensalmente?

Solução do exemplo #4

0.12	=	$(1 + (APR/12))^{12} - 1$
1.12	=	$(1 + (APR/12))^{12}$
$\sqrt[12]{1.12}$	=	$(1 + (APR/12))$
1.00949	=	$(1 + (APR/12))$
0.00949	=	APR / 12

APR = 0.11386 = 11.386%

Problemas práticos

Problema #1

O investidor Joe está planejando se aposentar daqui a vinte anos. Ele espera viver mais 30 anos após a sua aposentadoria. Ele acha que precisa de $100.000 por ano para viver, com sua primeira retirada na data de sua aposentadoria. Ele fará 30 retiradas.

Quanto deve ter Joe para investir hoje para atingir a sua meta de aposentadoria? Seus investimentos rendem 15%a.a. (Hey – ele é Joe INVESTOR).

Problema #2

Qual dos seguintes tem o custo de financiamento mais baixo?

a) APR = 8%, juro composto trimestralmente

b) APR = 7.8%, juro composto continuamente

c) APR = 7.9%, juro composto semestralmente

Problema #3

Suzy Saver quer colocar $1.000 por ano, começando no final deste ano, numa conta que renderá 5% ao ano. Ms. Saver planeja fazer 20 depósitos. Ela gostaria de retirar $2.000 cada ano começando um ano após o seu último depósito. Quantas retiradas anuais de $2.000 ela pode fazer?

Próximas atrações...

… amortização de empréstimos

… encontrando uma taxa de juros desconhecida

… encontrando um número de períodos desconhecido